

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمین

دانشکده مهندسی

گروه مهندسی عمران

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

عنوان:

آنالیز ارتعاشات غیر خطی لوله های نانوکامپوزیتی

حاوی جریان سیال

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر رضا کلاه چی

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر محمود ربانی

به وسیله:

رضا دورانگرد

آذر ۱۳۹۴

## تشکر و قدر دانی

حمد و سپاس خدای را که توفیق کسب دانش و معرفت را به ما عطا فرمود. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از تمامی اساتید بزرگوار بویژه اساتید دوره کارشناسی ارشد که در طول سالیان گذشته مرا در تحصیل علم و معرفت و فضائل اخلاقی یاری نموده‌اند تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد راهنمای گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر رضا کلاه‌چی که راهنمایی اینجانب را در انجام تحقیق، پژوهش و نگارش این پایان‌نامه تقبل نموده‌اند و از مشاوره‌های جناب آقای دکتر محمود ربانی نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم.

در پایان از خانواده مهربانم که تمام موفقیت‌های زندگی‌ام مرهون زحمات بی‌دریغ و دلسوزانه آنهاست و با صبرشان بنده را در این مدت همراهی نمودند کمال تشکر را دارم.

## چکیده

در این تحقیق، ارتعاشات غیر خطی یک لوله استوانه ای تقویت شده با نانولوله های کربنی با استفاده از روش تفاضلات مربعی<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار گرفته است. لوله حاوی جریان سیال ویسکوز بوده و در محیط الاستیک واقع شده است. محیط الاستیک با فنرهای عمودی وینکلر و برشی پاسترناک مدل شده است. برای مدل سازی و تعیین ویژگی های مکانیکی معادل کامپوزیت تقویت شده با نانو لوله کربنی، از مدل موری تاناکا استفاده شده است. این لوله با مدل های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو مورد تحلیل قرار گرفته است. با استفاده از معادلات کرنش-جابجایی غیر خطی، تنش-کرنش، معادلات انرژی بدست آمده و با استفاده از روش همیلتون یا کار مجازی معادلات حرکت در سه جهت متعامد درمختصات استوانه ای محاسبه شده است. هدف از انجام این تحقیق، بررسی اثرات سرعت سیال عبوری از هسته، پارامترهای هندسی لوله، محیط الاستیک، ویسکوزیته، درصد حجمی نانولوله کربنی و نوع سیال عبوری از لوله روی فرکانس ارتعاشات و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی می باشد. نتایج نشان می دهد که افزایش درصد حجمی نانو لوله کربنی باعث افزایش فرکانس لوله می شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیر خطی، لوله نانوکامپوزیتی، جریان سیال، روش عددی DQM، محیط الاستیک.

---

۱. Differential quadrature method (DQM)

## فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول: مباحث تئوری و نظری .....	۱
۱-۱- تقسیم بندی مواد .....	۱
۱-۱-۱- مواد فلزی .....	۲
۱-۱-۲- مواد غیر فلزی (سرامیکی) .....	۳
۱-۱-۳- مواد پلیمری .....	۴
۱-۱-۴- مواد نیمه هادی .....	۴
۱-۱-۵- مواد مختلط یا کامپوزیت ها .....	۵
۲-۱- نانو کامپوزیت .....	۶
۱-۲-۱- مزایا و معایب نانو کامپوزیت ها .....	۶
۲-۲-۱- تعریف نانو کامپوزیت ها .....	۸
۳-۲-۱- نانو کامپوزیت های زمینه پلیمری .....	۹
۳-۱- معرفی نانو لوله ها .....	۱۰
۱-۳-۱- نانو لوله های کربنی .....	۱۰

۱۲.....	۲-۳-۱- ساختار هندسی نانو لوله های کربنی
۱۶.....	۳-۳-۱- نانو لوله های نیتريد بور
۱۸.....	۴-۱- مفاهيم اوليه ارتعاشات
۱۹.....	۵-۱- تاريخچه نظريه های ارتعاشات در ديناميك سازه ها
۱۹.....	۱-۵-۱- نظريه اويلر- برنولي
۲۰.....	۲-۵-۱- نظريه ارتعاشات پيچشي كولمب
۲۱.....	۳-۵-۱- نظريه تيموشنكو
۲۱.....	۴-۵-۱- نظريه استودولا
۲۲.....	۵-۵-۱- نظريه دولاول
۲۲.....	۶-۵-۱- نظريه های پوانكاره و لياپونف
۲۳.....	۶-۱- پيشينه تحقيق
۲۶.....	فصل دوم- معادلات حاكم بر لوله
۲۶.....	۱-۲- مقدمه
۲۷.....	۲-۲- روابط کرنش-تغيرمکان
مدل	تير
اويلر-	برنولي.....
۲۹.....	۲۹.....
۳۰.....	۳-۲- معادلات تنش-کرنش
۳۱.....	۴-۲- روش انرژی
۳۱.....	۲-۴-۱- تئوری لایه ای

- ۳۳..... ۲-۴-۲- انرژی پتانسیل لوله
- ۳۴..... ۲-۴-۳- انرژی جنبشی لوله
- ۳۴..... ۲-۴-۴- کار خارجی ناشی از محیط الاستیک
- ۳۵..... ۲-۴-۵- کار خارجی ناشی از جریان سیال
- ۳۶..... ۲-۵- اعمال اصل همپلتون
- ۳۷..... ۲-۶- معادلات متشکله
- ۳۹..... ۲-۷- معادلات حاکمه بی بعد
- ۴۰..... مدل تیر تیموشنکو
- ۴۰..... ۲-۸- معادلات تنش- کرنش
- ۴۱..... ۲-۹- روش انرژی
- ۴۲..... ۲-۹-۱- انرژی کرنشی
- ۴۳..... ۲-۹-۲- انرژی جنبشی
- ۴۳..... ۲-۹-۳- کار خارجی سیال عبوری بر جداره ی داخلی
- ۴۳..... ۲-۹-۴- کار خارجی محیط الاستیک
- ۴۴..... ۲-۱۰- بکارگیری اصل همپلتون
- ۴۵..... ۲-۱۱- معادلات متشکله
- ۴۸..... ۲-۱۲- معادلات حاکمه بی بعد
- ۴۹..... ۲-۱۳- مدل موری-تاناکا
- ۵۱..... ۲-۱۴- شرط مرزی
- ۵۳..... فصل سوم- روش عددی **DQM**

۵۳.....	۱-۳- مقدمه
۵۵.....	۲-۳- معرفی روش تفاضلات مربعی
۵۷.....	۱-۲-۳- انتخاب نقاط نمونه
۵۹.....	۲-۲-۳- توابع تست و اعمال روش تفاضلات مربعی
۵۹.....	۱-۲-۲-۳- توابع تست روش تفاضلات مربعی
۶۰.....	۱-۱-۲-۲-۳- روش اول
۶۳.....	۲-۱-۲-۲-۳- روش دوم
۶۶.....	۳-۳- شرط مرزی و نحوه اعمال آن
۶۶.....	۱-۳-۳- تکنیک دلتا
۶۷.....	۲-۳-۳- تکنیک اصلاح ضرائب وزنی
۶۸.....	۳-۳-۳- نمونه ای از اصلاح ماتریس ضرائب وزنی
۷۰.....	۴-۳- پروسه حل معادلات حاکمه بر اساس روش تفاضلات مربعی
۷۲.....	<b>فصل چهارم- مقایسه و بررسی نتایج</b>
۷۲.....	۱-۴- تحلیل نتایج
۷۳.....	۲-۴- مدل تیر اویلر-برنولی
۷۳.....	۱-۲-۴- بررسی همگرایی روش تفاضلات مربعی
۷۳.....	۲-۲-۴- بررسی تاثيرات پارامتر هندسی لوله
۷۸.....	۳-۲-۴- بررسی تاثيرات درصد حجمی نانولوله کربنی
۷۹.....	۴-۲-۴- بررسی تاثيرات ضریب پواسون



- ۸۲..... ۴-۲-۵- بررسی تاثيرات ويسكوزيته سيال عبوري
- ۸۲..... ۴-۲-۶- بررسی تاثيرات محيط الاستيك
- ۸۵..... ۴-۳-۳- مدل تير تيموشنكو
- ۸۵..... ۴-۳-۱- بررسی تاثيرات پارامتر هندسي لوله
- ۸۸..... ۴-۳-۲- بررسی تاثيرات درصد حجمي نانولوله كربني
- ۸۸..... ۴-۳-۳- بررسی تاثيرات ضريب پواسون
- ۹۳..... ۴-۳-۴- بررسی تاثيرات ويسكوزيته سيال عبوري
- ۹۳..... ۴-۳-۵- بررسی تاثيرات محيط الاستيك
- ۹۷..... ۴-۳-۶- بررسی تاثيرات جنس لوله
- ۱۰۰..... ۴-۴- مقايسه مدل تير اويلر و تيموشنكو
- ۱۰۲..... ۴-۵- نتيجه گيري
- ۱۰۵..... ۴-۶- پيشنهادات
- ۱۰۶..... منابع و مآخذ
- ۱۰۹..... چكيده انگليسي

## فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱- شرایط اولیه فولرن‌ها در داخل نانولوله تک‌جداره.....	۱۲
شکل ۱-۲- ساختار فولرن‌های داخل نانولوله تک‌جداره بعد از ۴ پیکو ثانیه و در ۳۵۰۰ درجه کلوین.....	۱۲
شکل ۱-۳- نمایش بردارهایی که انواع نانولوله را تولید می‌کنند.....	۱۳
شکل ۱-۴- (الف) نانولوله‌ی زیگزاگ (20,0) (ب) نانولوله‌ی آرمیچر (10,10) (ج) نانولوله‌ی کایرال (10,5).....	۱۶
شکل ۱-۵- نانولوله نیتريد بور.....	۱۷
شکل ۱-۲- لوله گاز حاوی جریان سیال روی بستر الاستیک.....	۲۷
شکل ۱-۳- شبکه‌بندی با فواصل نامساوی.....	۷۴
شکل ۱-۴- همگرایی روش DQM روی فرکانس بر حسب سرعت سیال.....	۷۵
شکل ۲-۴- همگرایی روش DQM روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر.....	۷۵
شکل ۳-۴- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال.....	۷۶
شکل ۴-۴- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر.....	۷۷
شکل ۵-۴- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی فرکانس بر حسب سرعت سیال.....	۷۹

- شکل ۴-۶- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۸۰۰.....
- شکل ۴-۷- اثر ضریب پواسون روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۸۱.....
- شکل ۴-۸- اثر ویسکوزیته سیال عبوری از لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۸۳.....
- شکل ۴-۹- اثر ضریب پاسترناک روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۸۴.....
- شکل ۴-۱۰- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۸۶.....
- شکل ۴-۱۱- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۸۷.....
- شکل ۴-۱۲- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۸۹.....
- شکل ۴-۱۳- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۹۰.....
- شکل ۴-۱۴- اثر ضریب پواسون روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۹۱.....
- شکل ۴-۱۵- اثر ضریب پواسون روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۹۲.....
- شکل ۴-۱۶- اثر ویسکوزیته سیال عبوری از لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۹۴.....
- شکل ۴-۱۷- اثر ضریب پاسترناک روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۹۵.....
- شکل ۴-۱۸- اثر ضریب پاسترناک روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۹۶.....
- شکل ۴-۱۹- اثر جنس لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال ۹۸.....
- شکل ۴-۲۰- اثر جنس لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر ۹۹.....
- شکل ۴-۲۱- مقایسه فرکانس و سرعت بحرانی در دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو ۱۰۰.....

## فهرست جدول ها

عنوان

---

صفحه

جدول ۱-۱- بیان برخی ویژگی های فیزیکی و شیمیایی نانوذرات. .... ۱۱

جدول ۱-۲- ثوابت ماده کامپوزیتی. .... ۵۶



## فصل اول: مباحث تئوری و نظری

### ۱-۱- تقسیم بندی مواد

پیشرفت های وسیع و سریعی که در کلیه ی زمینه های صنعتی رخ داده است، مرهون دست یابی به مواد با کیفیت بالاتر است که در ساخت قطعات ماشین آلات و تجهیزات صنعتی به کار می روند. عموماً اغلب مهندسين شاغل در واحد های صنعتی، به ویژه طراحی و ساخت و تولید، با مواد مهندسی سرو کار دارند. آن ها معمولاً در انتخاب و کاربرد مواد در طراحی و ساخت و تولید اجزاء و بررسی و تحلیل شکست شرکت دارند.

موقعی که در طراحی و ساخت قطعه ای در مورد مواد تصمیم گیری می شود باید به مسائل مهمی از قبیل: روش ساخت، دقت ابعادی، حفظ و نگه داری شکل صحیح اولیه در حین کاربرد، داشتن خواص مورد نظر و نگه داشتن آن خواص برای مدت معین تحت شرایط محیط کار، امکان تعمیر و نگه داری آسان در هنگام کاربرد، سازگاری ماده با دیگر مواد اجزاء سیستم، بازیابی آسان ماده، مسائل مربوط به زیست محیطی ماده در ارتباط با ساخت و تولید، هزینه ی تولید و بالاخره در مواردی وزن و نوع سطح ظاهری آن توجه شود.

هدف اصلی مطالعه ی علم مواد آگاهی یافتن از انواع مواد ، خواص و توانایی آن ها در ارتباط با نیاز های صنعتی روز، شناخت عوامل موثر (از قبیل محیط و شرایط کاری) بر خواص و رفتار مواد و همچنین شناخت و بررسی روش ها و فرآیند هایی است که با کاربرد آن ها بتوان همواره در جهت حفظ و بهبود خواص مواد گام نهاد. به طور کلی مواد جامد مهندسی مورد نیاز برای طراحی و ساخت و تولید را می توان به سه گروه اصلی با خواص مربوط به خود تقسیم بندی کرد که عبارتند از: مواد فلزی، مواد غیر فلزی معدنی یا سرامیکی، مواد پلیمری یا مصنوعی. علاوه بر این سه گروه ، دو گروه دیگر از مواد وجود دارند که از این سه گروه منشعب می شوند و به نام مواد مختلط یا کامپوزیت ها<sup>۱</sup> و نیمه هادی ها<sup>۲</sup> شناخته شده اند.

### ۱-۱-۱- مواد فلزی

مواد فلزی از نظر اهمیتی که در صنعت دارد به دو گروه فلزات آهنی و آلیاژ های آن و فلزات غیر آهنی و آلیاژ های آن تقسیم می شود. فلزات آهنی و آلیاژ های آن عمدتاً درصد بسیار بالایی از آهن دارند که شامل انواع فولاد ها و چدن ها می شوند. فلزات غیر آهنی و آلیاژ های آن شامل تمام فلزات دیگر (غیر از آهن) مانند آلومینیوم، مس، روی، تیتانیوم، کرم و نیکل و ... و آلیاژ های آنها است. البته آلیاژ های غیر آهنی مقدار بسیار جزئی از آهن هم می توانند داشته باشند.

---

۱. Composites

۲. Semiconductors

مواد فلزی عمدتاً رسانای خوبی برای حرارت و الکتریسیته هستند. اغلب فلزات در درجه حرارت های معمولی محیط شکل پذیر بوده و در مقابل واکنش های شیمیایی پایداری بسیار بالایی ندارند. فلزات در شرایط معمولی دارای ساختار کریستالی اند. فلزات به طور خالص به ندرت به کار می روند و اغلب از آلیاژ های آن ها در صنعت استفاده می شود.

### ۱-۲-۱- مواد غیر فلزی معدنی (سرامیکی)

قسمت عمده مواد غیر فلزی معدنی مورد استفاده در صنعت را مواد سرامیکی تشکیل می دهند. مواد سرامیکی شامل ترکیباتی از عناصر فلزی با اکسیژن به نام سرامیک های اکسیدی و موادی سخت از قبیل کاربید ها، نیتراید ها و سیلسید ها به نام سرامیک های غیر اکسیدی است که قسمت عمده ای از مواد نسوز را تشکیل می دهند. سرامیک های سیلیکاتی (مانند چینی ها) نوع دیگری از مواد سرامیکی اند. مواد سرامیکی قابلیت شکل پذیری نداشته و بسیار تردند. همچنین در مقابل واکنش های شیمیایی بسیار پایدار بوده و در درجه حرارت های بالا مقاوم اند. قابلیت هدایت الکتریکی و حرارتی سرامیک ها به اندازه ای پایین است که به عنوان مواد عایق به کار می روند. مواد سرامیکی می توانند ساختار کریستالی، غیر کریستالی یا مخلوطی از هر دو نوع کریستالی و غیر کریستالی (بی شکل) داشته باشند. امروزه با فرایند های صنعتی جدید می توان سرامیک های نسبتاً مقاوم به شکست تولید کرد.



### ۱-۱-۳- مواد پلیمری

مواد پلیمری از کنار هم قرار گرفتن تعداد زیادی از مولکول های زنجیره ای یا شبکه ای بزرگ مواد آلی، که از کربن و عناصر دیگری مانند هیدروژن، کلر، فلوئور، اکسیژن و نیتروژن تشکیل شده اند، به وجود می آیند. مواد پلیمری در طبیعت به صورت آزاد وجود ندارند و اغلب از طریق روشهای شیمیایی و پلیمر کردن منومر های گازی شکل بدست می آیند. اغلب مواد پلیمری دارای ساختار غیر کریستالی و یا مخلوطی از کریستالی و غیر کریستالی هستند. مواد پلیمری دارای قابلیت هدایت الکتریکی بسیار ضعیفی هستند، به طوری که به عنوان عایق الکتریکی خوب به کار می روند، مواد پلیمری معمولاً در درجه حرارت های پایین (زیر صفر) ترد می شوند ولی در درجه حرارت های نسبتاً بالا قابلیت شکل پذیری دارند و در درجه حرارت های بالا ذوب یا متلاشی می شوند. مواد پلیمری در مقابل عوامل و واکنش های شیمیایی در درجه حرارت معمولی محیط و در مجاورت هوای آزاد پایدارند. عموماً مواد پلیمری وزن مخصوص پایینی دارند.

### ۱-۱-۴- مواد نیمه هادی

نیمه هادی ها از جمله مواد معدنی بوده و از نظر خواص بین مواد فلزی و سرامیکی قرار دارد و در صنایع الکترونیکی به کار می رود. هدایت الکتریکی نیمه هادی ها قابل کنترل بوده، به طوری که می تواند در ساخت ترانزیستور ها و یکسو کننده ها به کار روند.

## ۱-۱-۵- مواد مختلط یا کامپوزیت ها

مواد مختلط یا کامپوزیت ها به موادی گفته می شود که از مخلوط چند ماده (حداقل دو ماده) با خواص متفاوت تشکیل شده باشند. اجزای مواد مختلط از نظر شکل و ترکیب شیمیایی متفاوت بوده و در یکدیگر حل نمی شوند و از نظر اندازه و ابعاد در حد میکروسکوپی و ماکروسکوپی وجود دارند. بدین ترتیب می توان موادی با خواص جدید به دست آورد که به نوبه ی خود دارای خواصی مناسبتر از خواص هر یک از اجزای اولیه است. انواع مختلفی از مواد مختلط وجود دارند. اغلب مواد مختلط شامل یک جزء نرم و شکل پذیر به عنوان جزء اصلی زمینه و یک جزء بسیار سفت و سخت به عنوان تقویت کننده است. جزء تقویت کننده می تواند به شکل های صفحه ای، الیافی و ذره ای باشد. همچنین موادی که سطح خارجی آن ها برای حافظت در مقابل خوردگی و یا سایش پوشش داده می شود، مانند قلع و روی اندود کردن و یا گالوانیزه کردن سطح خارجی به وسیله ی جزء مقاوم دوم، مثل آب کرم و نیکل دادن، روکش دادن مکانیکی با ورق بسیار نازک مقاوم دیگر، پوشش دادن با مواد پلیمری و یا سرامیکی، جزء مواد مختلط هستند. بطور کلی کامپوزیت ها به سه دسته ماکرو، میکرو و نانو تقسیم می شوند. اگر یکی از مواد تقویت کننده مورد استفاده در مقیاس ۱ تا ۱۰۰ نانومتر باشد، به آن نانو کامپوزیت اطلاق می شود که در این پروژه به آن پرداخته می شود.

## ۱-۲-نانوکامپوزیت

فناوری نانو و تولید مواد در ابعاد نانومتری، موضوع جذابی برای تحقیقات است که در دهه اخیر توجه بسیاری را به خود معطوف داشته است. نانوکامپوزیت ها نیز به عنوان یکی از شاخه های این فناوری جدید، اهمیت بسیاری یافته است و یکی از زمینه هایی است که کاربردهای صنعتی پیدا کرده است. تلاش های اولیه موفقیت آمیز در تهیه نانوکامپوزیت ها به دهه های شصت و هفتاد قرن بیستم میلادی باز می گردد. اما در ۱۹۸۰ با تهیه نانوکامپوزیت ها بر پایه نایلون-خاک رس به صورت تجاری به وسیله شرکت تویوتای ژاپن، تحقیقات برای ساخت این مواد شدت و سرعت بیشتری پیدا کرد و شرکت های یوبی، یونی، کیتا، هانیول و بایر نیز نانوکامپوزیت هایی را ارائه نمودند که عمده کاربرد آنها در خودروسازی و صنایع بسته بندی بود. از آن به بعد تعداد دیگری از شرکت ها، نانوکامپوزیت ها را به منظور کاربردهای تجاری مورد مطالعه قرار دادند و در اواخر سال ۲۰۰۱ میلادی شرکتهای جنرال موتورز و باسل اولین کاربرد نانوکامپوزیت های را در قطعات خارجی اتومبیل ارائه نمودند [۱ و ۲].

### ۱-۲-۱-مزایا و معایب نانوکامپوزیت ها

ظهور مواد نانوکامپوزیت، تحولی اساسی در خواص مکانیکی و حرارتی مواد ایجاد کرده است.

خواص منحصر به فرد مواد نانوکامپوزیت را می توان به صورت زیر بیان کرد:

پودرهای نانوکامپوزیت نسبت سطح به حجم بالایی دارند. این نسبت در حالت بی شکل نسبت به حالت بلوری، بیشتر است. کسر زیادی از اتمها در سطح ذرات پودرهای نانوکامپوزیت و یا در مرز دانه های ریز ساختار نانوکامپوزیت ها قرار دارند. به دلیل دو خاصیت اخیر پودرهای نانوکامپوزیت، قابلیت تف تجوشی بالایی دارند. در ساخت نانوکامپوزیت ها از پودرهای نانوکامپوزیت یا پودرهای نانومتری، به دلیل کنترل فرآیند در مقیاس نانومتری، ریزساختاری کاملاً یکنواخت بدست می آید. نانوکامپوزیت ها خواص فیزیکی و مکانیکی از قبیل استحکام، سختی، چقرمگی و مقاومت حرارتی بالایی در محدوده وسیعی از دما دارند. افزودن پنج تا ده درصد حجمی فاز دوم به فاز زمینه، باعث افزایش چشمگیری در خواص فیزیکی و مکانیکی نانوکامپوزیت ها می شود. لذا جدیدترین فناوریها در طراحی ریزساختاری نانوکامپوزیت ها، برای بهبود خواص فیزیکی و مکانیکی آن می باشد. در مقابل خواص منحصر به فرد مواد نانوکامپوزیت، در ساخت نانوکامپوزیت ها مشکلات فرآیندی قابل توجهی وجود دارد که نقش تعیین کننده ای دارند. از اساسی ترین این مشکلات می توان به موارد زیر اشاره کرد:

عدم توزیع یکنواخت فاز دوم در فاز زمینه در نانوکامپوزیت ها، خواص مکانیکی نانوکامپوزیت ها را کاهش می دهد. تجمع ذرات پودر بسیار ریز در نانوکامپوزیت ها موجب افزایش انرژی سطحی آنها شده، کاهش خواص مکانیکی نانوکامپوزیت ها را به دنبال دارد. استفاده از مواد شیمیایی گران قیمت برای توزیع یکنواخت فاز دوم در داخل فاز زمینه و جلوگیری از بهم چسبیدن ذرات پودر نانوکامپوزیتی و ساخت نانوکامپوزیت هایی با ریزساختاری همگن و خواص مکانیکی بالا، باعث غیراقتصادی شدن و همچنین پیچیده تر شدن فرآیند می گردد.

## ۱-۲-۲-تعریف نانوکامپوزیت ها

نانوکامپوزیت ها شامل ترکیب ذرات در حوزه مولکولی یا نانو در زمینه پلیمری، فلزی یا سرامیکی می باشد. در همه موارد مشاهده می شود که مقدار نانوذرات در این زمینه ها می تواند به طور کامل خواص این مواد را تغییر دهد این نانو ذرات به عنوان تقویت کننده زمینه و همچنین تغییردهنده رفتار الکتریکی مواد پایه به کار می روند.

اما به عنوان یک تعریف، نانوکامپوزیت ها، مواد مرکبی هستند که لااقل یکی از اجزاء تشکیل دهنده آنها دارای ابعادی در محدوده نانومتری، در محدوده ۱-۱۰۰ نانومتر باشد؛ اما یک سری پودرهای نانوکامپوزیت نیز وجود دارد که این پودرها شامل ذرات با ابعادی مختلف در محدوده نانومتری هستند. در مواد نانوکامپوزیت به جزء پخش شونده که به صورت الیاف، صفحات مسطح، ذرات و یا حتی حفره ها، ترک ها و غیره در ابعاد نانومتری باشند، فاز دوم یا تقویت کننده اطلاق می شود و همین طور به جزء پیوسته در نانوکامپوزیت ها که می تواند در ابعاد نانومتری و یا بالاتر باشد فاز زمینه می گویند.

### ۱-۲-۳-نانوکامپوزیت‌های زمینه پلیمری

در این پروژه نانو کامپوزیت های پلیمری تقویت شده با نانو لوله ها مورد بحث قرار می گیرد. در نانوکامپوزیت‌های زمینه پلیمری از نانو ذرات، نانو صفحات<sup>۱</sup>، نانو الیاف و همین طور نانو لوله-ها به عنوان ماده تقویت کننده استفاده می‌شود. در نانوکامپوزیت‌های زمینه پلیمری معمولاً از پلیمر های ترموست نظیر اپوکسی<sup>۲</sup>، پلی ایمید و پلیمرهای ترموالاستیک نظیر نایلون<sup>۶</sup>، پلی اترکتون<sup>۳</sup>، پلی پروپیلین<sup>۴</sup>، پلی استایرن<sup>۵</sup> و پلی وینیلیدن فلوراید<sup>۶</sup> به عنوان ماده زمینه این کامپوزیت‌ها استفاده می‌گردد امروزه با پیشرفت تکنولوژی، استفاده از پلی وینیلیدن فلوراید افزایش یافته است که دلایل آن عبارتند از:

۱- در این لوله ها خوردگی نه در سطح داخلی که در تماس با سیال است و نه در سطح خارجی که در تماس با محیط است ، وجود ندارد . بنابراین کلیه هزینه های مربوط به پوشش داخلی و محافظتهای خارجی به طور کامل از بین می رود .

۲- سطح داخلی این لوله ها بسیار صاف است در نتیجه افتهای اصطکاکی ناشی از مسیر به حداقل مقدار خود می رسد .

---

۱. Nanoplate

۲. epoxy

۳. Polyetheretherketon

۴. Polypropylene

۵. Polystyrene

۶. Poly vinyliden floride (PVDF)

۳- چون افت هیدرولیکی این لوله ها پایین است ، لذا می توان سرعت را بالا انتخاب کرد و در نتیجه در یک فلو ودبی مشخص می توان سایز لوله را نسبت به لوله های فولادی یک سایز کمتر انتخاب کرد .

۴- این پلیمر دارای خواص پیزوالکتریک می باشد که کاربرد فراوانی در مواد هوشمند دارد و زمینه کامپوزیتی در این پروژه نیز از همین ماده می باشد. فاز تقویت در این پروژه از نانو لوله ها می باشد که در زیر به توضیح آن ها پرداخته می شود.

### ۳-۱- معرفی نانولوله ها

نانو لوله ها به دو دسته کربنی و نیتريد بور تقسیم بندی می شوند که در زیر به آن ها پرداخته می شود:

#### ۱-۳-۱- نانولوله های کربنی

نانولوله های کربنی<sup>۱</sup> را می توان بر اساس فولرین ها تعریف نمود : فولرین، ساختاری قفسه مانند از اتم های کربن و شبیه توپ فوتبال است که از سطوح شش گوش و پنج گوش تشکیل شده که در شکل های (۱-۱) و (۲-۱) نشان داده شده است. نانولوله ها، فولرین های کشیده و بلندی هستند که دیواره های آنها از ساختار شش گوش کربنی (گرافیت) می باشد که دو سر آنها

---

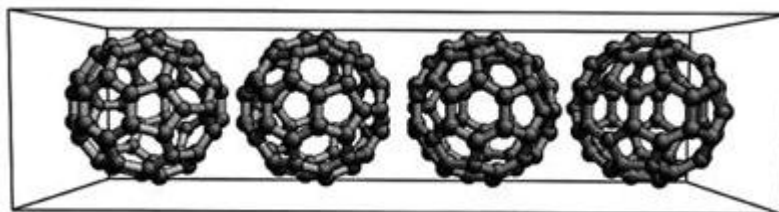
۹. Carbon Nanotubes (CNTs)

باز یا بسته است . همچنین نانولوله های کربنی می توانند به شکل یک لایه از گرافیت که به صورت لوله در آمده است، تصور شوند. به این نکته توجه شود که کربن در الماس، چهار همسایه دارد ولی در لایه ورقه گرافیت، سه همسایه دارد. خواص نانولوله ها تا حد زیادی به نظم اتمی، چگونگی درهم پیچیدن این لایه گرافیتی، قطر و طول لوله، مورفولوژی و ساختار آن بستگی دارد. برخی از ویژگیهای نانوذرات در جدول (۱-۱) به طور خلاصه آمده است:

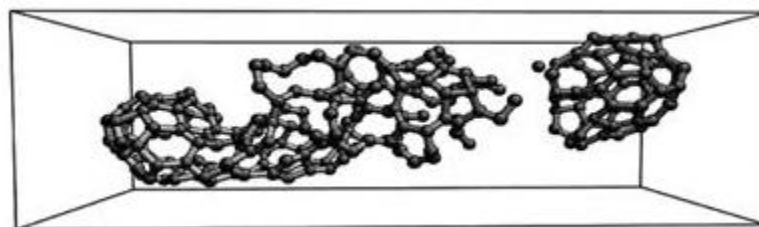
جدول ۱-۱- بیان برخی ویژگی های فیزیکی و شیمیایی نانوذرات [۲]

خصوصیات	مثال
کاتالیستی	اثر کاتالیستی بهتر، به دلیل نسبت سطح به حجم بالاتر
الکتریکی	افزایش هدایت الکتریکی در سرامیک ها و نانو کامپوزیت های مغناطیسی، افزایش مقاومت الکتریکی در فلزات
مغناطیسی	افزایش مغناطیسیته با اندازه بحرانی دانه ها، رفتار سوپر پارامغناطیسیته ذرات
نوری	خصوصیات فلوئورسنتی، افزایش اثر کوانتومی کریستال های نیمه هادی
بیولوژیکی	افزایش نفوذ پذیری از بین حصارهای بیولوژیکی





شکل ۱-۱- شرایط اولیه فولرن ها در داخل نانولوله تک جداره [۲]



شکل ۱-۲- ساختار فولرن های داخل نانولوله تک جداره بعد از ۴ پیکو ثانیه و در ۳۵۰۰ درجه کلونین [۲]

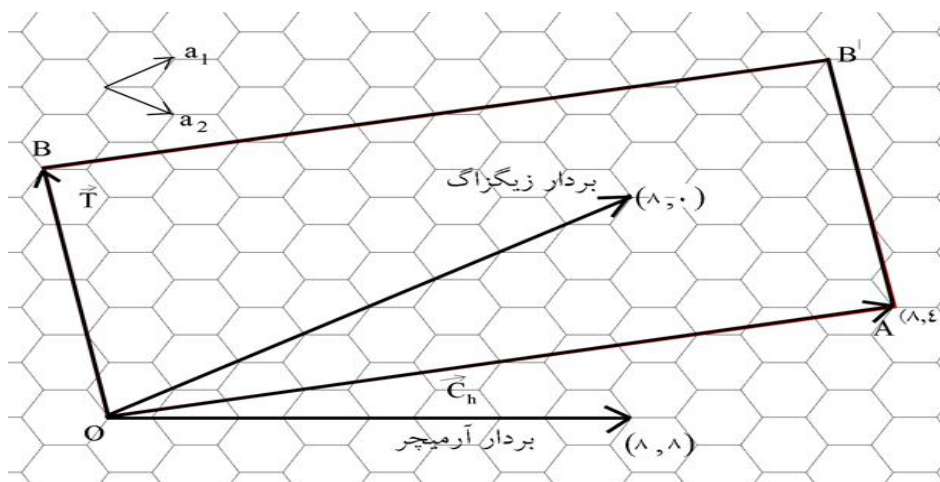
### ۱-۳-۲- ساختار هندسی نانولوله های کربنی

نانولوله های کربنی را همان طور که پیش تر گفته شد، می توان به صورت صفحات گرافیتی دانست که به دور یک استوانه پیچیده شده باشند. اگر تنها یک صفحه ی گرافیت به دور استوانه پیچانده شده باشد، شکل حاصل یک نانولوله ی تک دیواره خواهد بود. اگر چندین صفحه ی گرافیت به دور استوانه پیچانده شود، نانولوله ی چند دیواره به وجود می آید. مشاهدات تجربی نشان داده اند که فاصله بین هر جداره از نانولوله- های چند دیواره تقریباً برابر فاصله بین صفحات گرافیتی و برابر  $0.314 \text{ nm}$  است [۲].

اتم O را در شکل (۲-۶) در نظر بگیرید. از این اتم به وسیله بردار  $\vec{C}$  که به صورت زیر تعریف می-شود، به اتم A رسید.

$$\vec{C} = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$$

حال اگر محوری را عمود بر بردار  $\vec{C}$  از نقطه A رسم کرده و همین کار در نقطه O انجام شود و صفحه‌ی گرافیت از روی این خط‌ها بریده شود، شکل حاصل به صورت یک مستطیل با عرضی (طول) برابر  $|\vec{C}|$  خواهد شد (شکل ۱-۳). اگر با این مستطیل یک استوانه درست شود، یک نانولوله‌ی تک دیواره درست می‌شود که محیط این نانولوله دقیقاً برابر بردار  $\vec{C}$  می‌باشد. چون نانولوله‌ها را می‌توان به وسیله بردار  $\vec{C}$  تولید کرد، از این پس به این بردار نام ویژه‌ای را اختصاص داده که آن بردار کایرال<sup>۱</sup> می‌باشد. این بردار به وسیله دو مؤلفه‌ی  $(n, m)$  مشخص می‌شود. بنابراین نانولوله‌ها را می‌توان بر اساس همین موضوع با جفت اعداد طبیعی  $(n, m)$  نام گذاری یا معرفی نمود.



شکل ۱-۳- نمایش بردارهایی که انواع نانولوله را تولید می‌کنند [۲]

۱. Chiral vector

سه گونه مختلف نانولوله را می‌توان بر اساس نحوه‌ی انتخاب بردار کایرال تولید کرد. اگر در بردار کایرال  $\vec{C}_h$  مقدار  $n = m$  باشد، نانولوله‌ی حاصله را آرمیچر<sup>۱</sup> می‌نامند و اگر  $m = 0$  باشد، نانولوله‌ی حاصله را زیگزاگ<sup>۲</sup> می‌نامند. در بقیه‌ی حالت‌ها نانولوله را کایرال می‌نامند. در شکل (۱-۳) بردارهای زیگزاگ و آرمیچر نشان داده شده‌اند. اندازه‌ی بردار کایرال و قطر نانولوله از روابط زیر بدست می‌آیند [۳]:

$$|\vec{C}_h| = a(n^2 + m^2 + nm)^{\frac{1}{2}}$$

$$d = \frac{|\vec{C}_h|}{\pi}$$

زاویه‌ی کایرال را به صورت زاویه‌ی بین محور زیگزاگ و بردار کایرال تعریف می‌کنند [۷]. در شکل (۱-۳) این زاویه با نماد  $\theta$  نشان داده شده است. با بررسی بیشتر در این شکل می‌توان رابطه‌ی زیر را بدست آورد:

$$\vec{C}_h \cdot \vec{a}_1 = |\vec{C}_h| |\vec{a}_1| \cos(\theta)$$

با توجه به مجموعه روابط فوق می‌توان زاویه‌ی کایرال را بر حسب اعداد مشخصه‌ی  $(n, m)$  به

صورت زیر محاسبه کرد.

$$\cos(\theta) = \frac{2n + m}{2\sqrt{(n^2 + m^2 + nm)}}$$

---

۱. Armchair

۲. Zigzag

که مقدار این زاویه در گستره‌ی  $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$  قرار خواهد گرفت.

بردار زیگزاگ کمترین زاویه یعنی صفر را دارد و بردار آرمیچر بیشترین زاویه را اتخاذ می‌کند. اگر در جهت محور نانولوله شروع به حرکت شود، بعد از پیمودن مسافت  $\vec{T}$  به وضعیت مشابه هندسی خواهیم رسید. در واقع بردار انتقال  $\vec{T}$  همان بردار پایه‌ی شبکه‌ی یک بعدی نانولوله می‌باشد. این بردار را به لحاظ هندسی به این صورت تصور کنید که از نقطه‌ی  $O$  نشان داده شده در شکل (۳-۱)، عمود بر بردار کایرال  $\vec{C}_h$  به اولین اتمی که از نوع اتم  $O$  باشد، برداری رسم می‌شود که این بردار همان بردار انتقال  $\vec{T}$  است. در واقع در طول نانولوله اگر از هر نقطه به اندازه‌ی بردار انتقال جلو یا عقب رفته شود، به موقعیت یکسان هندسی خواهیم رسید. اما این بردار را می‌توان به صورت جبری بر حسب اعداد مشخصه‌ی  $(n, m)$  نیز بیان کرد. مؤلفه‌های این بردار را می‌توان بر حسب بردارهای پایه‌ی شبکه‌ی گرافیت به صورت زیر نوشت:

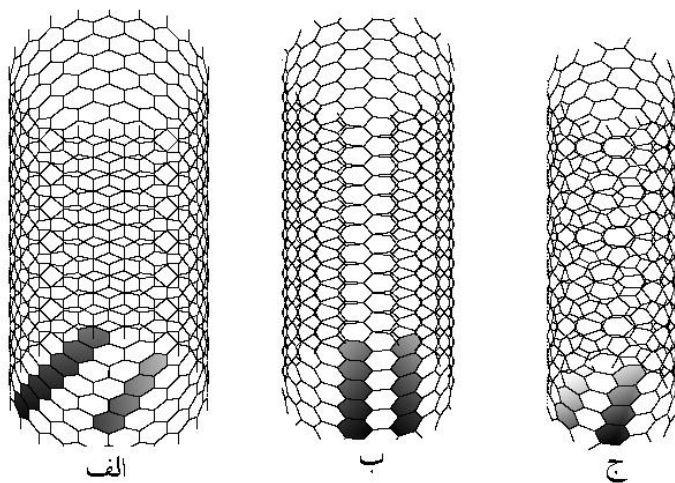
$$\vec{T} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2$$

شرط عمود بودن این بردار بر بردار کایرال به صورت زیر اعداد  $t_1$  و  $t_2$  را به نتیجه می‌دهد:

$$(t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2) \times (n \vec{a}_1 + m \vec{a}_2) = 0$$

$$t_1 = n + 2m$$

$$t_2 = -(2n + m)$$



شکل ۱-۴- الف) نانولوله‌ی زیگزاگ (20,0) (ب) نانولوله‌ی آرمیچر (10,10) (ج) نانولوله‌ی کایرال (10,5). [۳]

با انتخاب این اعداد، برداری موازی بردار انتقال خواهیم داشت. اگر این دو عدد بر بزرگترین شمارنده‌ی مشترکشان تقسیم شود، آنگاه بردار انتقال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$t_x = \frac{(n + \nu m)}{p}$$

$$t_y = -\frac{(\nu n + m)}{p}$$

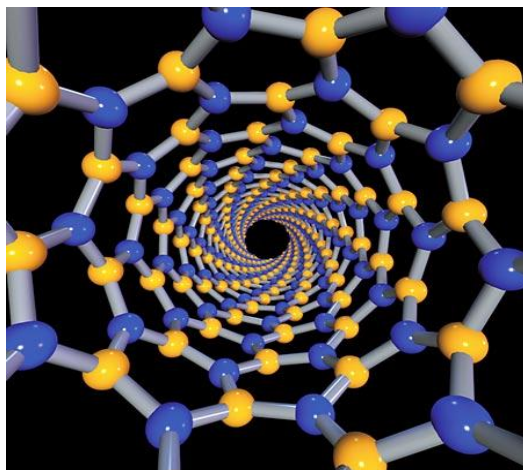
$p$  بزرگترین شمارنده‌ی مشترک  $n + 2m$  و  $2n + m$  است. در شکل (۱-۴) سه گونه متفاوت از

نانولوله‌های کربنی را نشان داده شده است.

### ۱-۳-۳- نانولوله‌های نیتريد بور

نیتريد بور یک ترکیب شناخته شده شیمیایی، نوری، الکتریکی، گرمایی و مکانیکی شگفت‌انگیزی است. سیستم نیتريد بور از لحاظ ساختاری شبیه سیستم کربنی خالص است. نیتريد بور

هگزاگونال، مکعبی و نانولوله نیتريد بور<sup>۱</sup> به ترتيب مشابه گرافيت، دياموند و نانولوله هاي کربني هستند. همانند دياموند، نيتريد بور به عنوان یک رساناي الکتریکي عمل می کند اما رساناي گرمایی بسيار خوبی دارد. نانوتيوب هاي نيتريد بور نسبت به نانوتيوب هاي کربني (CNTs)، توجهات ویژه ای را در کاربردهای نانوالکترونیک و نانو مکانیک به خود جلب کرده اند.



شکل ۱-۵- نانولوله نیتريد بور [۵]

برای اولین بار نانوتيوب هاي نيتريد بور (شکل (۱-۵)) از طريق محاسبات نظري پيش بينی شدند [۳ و ۴]. سنتز موفقیت- آمیز نانوتيوب هاي نيتريد بور خالص در سال ۱۹۹۵ گزارش شده است [۵]. نشان داده شده است که نانوتيوب هاي کربني بسته به قطر تيوب و کایرالیته می توانند بعنوان رسانا یا نیمه رسانا عمل کنند [۶]. در مقایسه با نانوتيوب هاي کربني، تمامی نانوتيوب هاي نيتريد بور نیمه رسانا می باشند [۳ و ۶]. نانوتيوبهاي نيتريد بور دارای پهنای شکاف نواری در حدود شش الکتروولت و مستقل از قطر تيوب می باشد [۷]. نشان داده شده است که نانوتيوب هاي

---

۱. boron nitride nanotubes (BNNT)

نیترید بور در مقایسه با نانوتیوب های کربنی، خواص جالب زیادی از خود بروز می دهند  
(مقاومت عالی در برابر اکسید شدن در دماهای بالا [۸]).

## ۱-۴- مفهوم ارتعاشات

ارتعاشات به نوعی از حرکت سیستمهای دینامیکی اطلاق می شود که به صورت نوسانی صورت پذیرفته و حرکت در یک پریود زمانی تکرار شود. این نوع حرکت را در ساده ترین شکل می توان با یک جرم و یک فنر شبیه سازی کرد. با القاء یک تغییر مکان اولیه به جرم متصل به فنر و رها کردن آن، حرکت نوسانی رخ می دهد که می توان دامنه آن را به کمک یک تابع سینوسی بیان نمود.

مشخصه های مهم حرکت ارتعاشی عبارتند از:

- دامنه، که معیاری از شدت ارتعاش است.
- فرکانس یا تواتر، که معیاری از نرخ حرکت در واحد زمان است.
- فاز، که توالی حرکت را نسبت به یک مرجع مشخص می سنجد.
- دامنه ارتعاشات را می توان از طریق سه پارامتر مختلف بیان کرد:
- جابجایی: پارامتر اولیه دامنه که در مورد سیستم جرم و فنر، موقعیت جرم را در هر لحظه به دست می دهد.

- سرعت: از نظر ریاضی مشتق جابجایی است که نرخ تغییرات جابجایی در واحد زمان را نشان می دهد.

- شتاب: از نظر ریاضی، مشتق سرعت است و نرخ تغییرات سرعت در واحد زمان را نشان می دهد.

به طور کلی دامنه هر موج سینوسی را به سه شکل می توان تعیین کرد:

- مقدار  $p-0$  (صفر تا پیک)

- مقدار  $p-p$

- مقدار  $rms$  یا مقدار مؤثر مقدار میانگین

## ۱-۵- تاریخچه نظریه های ارتعاشات در دینامیک سازه ها [۹]

### ۱-۵-۱- نظریه اویلر- برنولی

دانیل برنولی سوئسی پس از اخذ مدرک دکترای پزشکی، در سال ۱۷۲۵ استاد ریاضیات در دانشگاه سنت پترزبورگ شد. سپس، در دانشگاه باسیل به تدریس علم تشریح و گیاه شناسی پرداخت. برنولی، وضع کننده علوم هیدروستاتیک و هیدرودینامیک است. استنتاج معادله حرکت ارتعاشات تیرها و حل مسئله سیمهای مرتعش نیز از کارهای اوست. برنولی اولین شخصی بود که اصل ترکیب هارمونیک در ارتعاشات آزاد را بکار برد.



لئونارد اویلر ریاضیدان سوئیسی، استاد ریاضیات در دانشگاه سنت پترزبورگ روسیه بود. کارهای زیادی در جبر و هندسه انجام داد (ثابت اویلر، و دستگاه مختصات اویلر را ریاضیدانها بخوبی میشناسند). تعیین منحنی تغییر شکل تیرها، بار کمانش در ستونها، و تحلیل حرکت یک حلقه مرتعش، از جمله کارهای اوست. اویلر، معادلات ارتعاشات خمشی یک میله را نیز استخراج کرد، و حل آنرا بصورت سری نشان داد.

اوایلر در سال ۱۷۴۴ و برنولی در سال ۱۷۵۱ برای اولین بار، ارتعاشات تیرهای باریک را مطالعه کردند. روش آنها را نظریه اویلر-برنولی، یا نظریه تیرهای باریک میگویند.

#### ۱-۵-۲- نظریه ارتعاشات پیچشی کولمب

چارلز اگوستین کولمب مهندس و فیزیکدان فرانسوی، تحقیقاتش را در کتابی تحت عنوان "تئوری ماشین های ساده" در سال ۱۷۷۹ منتشر کرد (این کتاب، درباره "قانون تناسب کولمب" بین اصطکاک و فشار بحث میکند). در سال ۱۷۸۴، کولمب ارتعاشات پیچشی با دامنه کوچک را نیز حل کرد. ارتعاشات پیچشی یک استوانه فلزی، که از یک سیم آویزان شده است، توسط چارلز اگوستین کولمب در سال ۱۷۸۴ مورد بررسی قرار گرفت. کولمب، با این فرض که گشتاور مقاوم در سیم با زاویه پیچش سیم متناسب است، معادله حرکت ارتعاشات پیچشی استوانه آویزان را استخراج کرد، و با انتگرال گیری از آن به این نتیجه رسید که دوره تناوب ارتعاشات استوانه، ربطی به زاویه پیچش آن ندارد.

### ۱-۵-۳-نظریه تیموشنکو

استفن پروکفیویش تیموشنکو مهندس روسی الاصل که به آمریکا مهاجرت کرد، یکی از مشهورترین نویسندگان در زمینه الاستیسیته، مقاومت مصالح، و ارتعاشات است. او رئیس دپارتمان مکانیک در دانشگاههای میشیگان و استانفورد بود. در آمریکا او را پدر مکانیک مهندسی میدانند. نظریه نوسان تیرها، که در سال ۱۹۲۱ مطرح شد، نظریه تیر تیموشنکو شهرت دارد. استفان تیموشنکو، با بررسی آثار اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی، نظریه بهتری درباره نوسان تیرها ارائه کرد، که آنرا نظریه تیموشنکو یا نظریه تیر ضخیم میگویند. همچنین آر.دی مندلین نیز نظریه مشابهی را برای تحلیل ارتعاشات صفحات ضخیم مطرح نمود.

### ۱-۵-۴-نظریه استودولا

آرلبروسلاو استودولا مهندس سوئیسی، در سال ۱۸۹۲ به عضویت انستیتو تکنولوژی زوریخ پذیرفته شد، و مدیریت ماشین آلات گرمائی را در انستیتو به عهده گرفت. او در زمینه طراحی ماشینها، کنترل اتوماتیک، ترمودینامیک، دینامیک ماشینها، و توربینهای بخار کار کرد. در آغاز قرن بیستم، استودولا یکی از برجسته ترین آثار خود را منتشر کرد. در این کتاب، موضوع ارتعاشات، جریان سیالاتف تنش گرمائی، تمرکز تنش در سوراخها و ماهیچه ها، تحلیل تنش در صفحات، پوسته ها و در دیسکهای چرخان و نیز کاربرد ترمودینامیک در طراحی توربینها مورد بحث قرار

گرفته است. استودولا یک روش تقریبی را برای محاسبه فرکانس های طبیعی تیرها ابداع کرد، این روش برای تیغه های توربین هم به کار می رود.

#### ۱-۵-۵- نظریه دولاول

سیجی پی دولاول، یک روش عملی را برای حل مسئله نوسان دیسک های چرخان نامیزان ابداع کرد. دولاول، برای بررسی علت شکست شفت های فولادی در توربین های پر سرعت، یک میله از جنس چوب خیزران را به عنوان شفت توربین مورد استفاده قرار داد. او مشاهده کرد که این میله نه تنها ارتعاشات چرخ نامیزان را حذف می کند، بلکه تا سرعت ۱۰۰۰۰۰ دور بر دقیقه نیز نمی شکند.

#### ۱-۵-۶- نظریه های پوانکاره و لیاپونف

درانتهای قرن نوزدهم، برای اولین بار نظریه ریاضی ارتعاشات غیر خطی توسط این دومطرح شد، جولز هنری پوانکاره ریاضیدان فرانسوی و استاد مکانیک دانشگاه های پاریس و اکول، در سال ۱۸۹۲ "روش اختلال" را برای حل تقریبی مسائل مکانیک سماوی ابداع کرد. همچنین او سهم عمده ای در علم الکترو دینامیک دارد. پوانکاره، با دسته بندی نقاط تکین در سیستمهای غیر خطی مستقل از زمان نقش مهمی در مطالعه ارتعاشات غیر خطی ایفا کرد. در همین سال لیاپونوف اصول نظریه جدید پایداری را مطرح کرد. که این نظریه برای انواع سیستمهای دینامیکی بکار می رود.

## ۱-۶- پیشینه تحقیق

پوسته های استوانه ای کاربردهای وسیعی در بسیاری از رشته های مهندسی مثل مکانیک، شیمی، هوافضا، عمران، هسته ای و ... دارند. مثلا در مکانیک اتومبیل، بدنه ماشین ها از پوسته ساخته شده است و در صنعت نفت و گاز به از پوسته های استوانه ای به عنوان مخازن تحت فشار استفاده می گردد.

ارتعاشات خطی پوسته های استوانه ای توسط محققان زیادی مطالعه شده است. اولین مطالعه روی ارتعاشات غیر خطی پوسته های استوانه ای توسط ریسنر [۱۰] انجام شد. وی از تئوری غیر خطی دائل استفاده کرد و نتیجه گرفت که در نظر گرفتن ترم های غیرخطی می تواند به دقت محاسبات بیافزاید. بعد از ریسنر، گریگولیوک [۱۱] ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه ای را با شرط مرزی ساده مطالعه کرد. او با استفاده از مودهای ارتعاشی غیر خطی فرکانس را محاسبه نمود. چو [۱۲] کار ریسنر را ادامه داد و ارتعاشات غیر خطی پوسته استوانه ای با دو انتهای بسته را بررسی نمود. سپس ناوینسکی [۱۳] کار چو را تصدیق نمود.

انتشار موج پوسته های استوانه ای در حالت خطی مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. دانگ و همکارانش [۱۴] با استفاده از مدل پوسته استوانه ای، انتشار موج در نانولوله های چند جداره واقع در محیط الاستیک را بررسی نمودند. آن ها یافتند که وجود محیط الاستیک سبب افزایش سرعت فاز می شود. همچنین، قربانپور و همکارانش به کمک تئوری پوسته استوانه ای،

اثر محیط الاستیک را روی انتشار موج محوری و پیچشی نانولوله دو جداره را مطالعه کردند [۱۵].

پوسته های استوانه ای حاوی جریان سیال نیز کاربردهای فراوانی در صنعت و سیستم های بیومکانیکی دارند. به عنوان نمونه، محافظ حرارتی راکتورهای هسته ای و موتور احتراق داخلی هواپیما، مبدل های حرارتی، لوله های انتقال نفت و گاز، سیاهرگ ها، سیستم ریوی و ... با پوسته استوانه ای حاوی جریان سیال مدل می شود. بیشترین بررسی و تحقیق در مورد پوسته های استوانه ای حاوی جریان سیال توسط آمابیلی [۱۶] انجام شده است. اثر جریان داخل پوسته توسط پایدوسیسی و دنیس [۱۷]، ویور و آنی [۱۸]، پایدوسیسی و همکارانش [۱۹ و ۲۰]، آمابیلی و گارزییرا [۲۱] بررسی شده است. اثر پارامترهای هندسی روی ارتعاشات غیر خطی پوسته استوانه ای حاوی جریان سیال توسط پلیکانو و همکارانش [۲۲] انجام شد. نتایج این نویسندگان حاکی از آن است که تئوری غیر خطی دائل نتایج قابل قبولی را ارائه می دهد و دامنه ارتعاشی و تشدید به دلیل وجود سیال کاهش می یابد.

تمامی کارهای اشاره شده در فوق، دارای ساختار غیر کامپوزیتی هستند. در نظر گرفتن اینگونه ساختارها علی الخصوص نانوکامپوزیت های پلیمری هوشمند کاربردهای فراوانی در صنایع مهم دارد. مثلاً می توان از آن ها در سنسورها و عملگر های لوله های انتقال نفت و گاز استفاده نمود. با پیشرفت تکنولوژی، اینگونه ساختار ها جایگاه ویژه ای در صنایع باز کرده و استفاده از آن ها رو به رشد می باشد. دلیل این امر آن است که با استفاده از خاصیت هوشمندی و اعمال ولتاژ میتوان ارتعاشات، سرعت انتشار موج و محدوده پایداری سیستم ها را کنترل نمود. در این زمینه

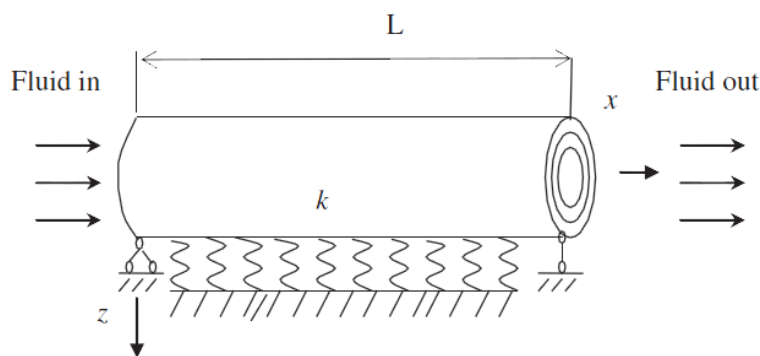
کارهای بسیار محدودی و فقط بصورت خطی انجام شده است. مسیا و سلداتو [۲۳] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای کامپوزیتی را مطالعه کردند. برای محاسبه خواص معادل کامپوزیت، تان و وانگ [۲۴] مدل میکرو-الکترومکانیکال را ارائه کردند. ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای کامپوزیتی حاوی جریان سیال توسط کادولی و جنسن [۲۵] انجام شد. ری و ردی [۲۶] کنترل پوسته های استوانه ای تقویت شده با فیبرهای پیزوالکتریکی را مطالعه کردند. همچنین، ماتسونو [۲۷] ارتعاشات و پایداری پوسته استوانه ای کامپوزیتی را به کمک تئوری مرتبه سوم برشی بررسی کرد.

با توجه به جستجو در پایگاه های علمی دنیا، هیچ محققى به بررسی ارتعاشات غیر خطی لوله نانو کامپوزیتی حاوی جریان سیال واقع در محیط پاسترناک نپرداخته است. این موضوع در شاخه تخصصی مکانیک، عمران و طراحی وسایل نانو و نانوکامپوزیت ها دارای اهمیت زیادی می باشد. بنابراین در این پروژه به بررسی ارتعاشات غیر خطی لوله های تقویت شده با نانولوله های کربنی واقع در محیط الاستیک پرداخته می شود. لوله حاوی جریان سیال ویسکوز بوده و در محیط الاستیک مدل شده با فنرهای عمودی وینکلر و برشی پاسترناک قرار دارد. با توجه به غیر خطی بودن، باید از روش های عددی مثل گالرکین، تفاضلات مربعی، بالانس هارمونیک افزایشی و ... برای محاسبه فرکانس و سرعت بحرانی سیال استفاده نمود. در این تحقیق، از روش عددی تفاضلات مربعی به دلیل دقت و سرعت همگرایی بهتر نسبت به سایر روش ها، استفاده شده است که در فصل سوم به تفصیل به آن پرداخته خواهد شد.

## فصل دوم: معادلات حاکم بر لوله

### ۲-۱- مقدمه

در این فصل معادلات حاکم بر ارتعاشات غیر خطی لوله های نانوکامپوزیتی حاوی جریان سیال با استفاده از مدل تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو، بدست آورده می شود. لوله از جنس پلی اتیلن و روی بستر الاستیکی که با فنرهای عمودی وینکلر و برشی پاسترناک مدل می گردد، واقع شده است. به منظور یافتن معادلات متشکله، ابتدا تئوری تیرها مطرح گردیده و فرضیات بکار گرفته شده به اختصار بررسی خواهد شد. در ادامه معادلات تنش- کرنش برای لوله با استفاده از کرنش های غیر خطی ارائه می گردد. نهایتاً انرژی کل لوله گاز محاسبه شده و با اعمال اصل همپلتون معادلات حاکم بدست می آید که از روش عددی تفاضلات مربعی برای محاسبه فرکانس غیر خطی استفاده می گردد. شکل (۲-۱) یک لوله با شعاع میانگین  $R$ ، ضخامت  $h$ ، طول  $L$  و دانسیته  $\rho$  را نشان می دهد. این لوله حاوی جریان ویسکوز با دانسیته  $\rho_f$  و ویسکوزیته  $\mu$  می باشد. لوله در محیط ویسکو الاستیک با ضریب عمودی وینکلر  $k_w$  و ضریب برشی پاسترناک  $k_g$  قرار دارد.



شکل ۱-۲- لوله گاز حاوی جریان سیال روی بستر الاستیک

## ۲-۲- روابط کرنش - تغییر مکان

کلی ترین حالت روابط کرنش تغییر مکان که همان تانسور کرنش لاگرانژ-گرین می باشد

در مختصات استوانه ای به قرار زیر است [۲۸]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_3}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\rho \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\rho \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\rho \partial \theta} \right)^2 \right] \\
 &+ \frac{1}{\rho^2} \left( 2u_3 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - 2u_2 \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_3^2 + u_2^2 \right), \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 \gamma_{z\theta} &= \left( \frac{\partial u_3}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{u_2}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right], \\
 \varepsilon_{xz} &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \left[ \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right], \\
 \varepsilon_{x\theta} &= \left( \frac{\partial u_1}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right],
 \end{aligned} \tag{۱-۲}$$



در فرمولهای فوق، کرنش‌ها بر حسب جابجایی برای لوله استوانه‌ای جدار نازک بیان شده است. همچنین، جابجایی‌ها در یک نقطه کلی لوله در مختصات استوانه‌ای با  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  نشان داده شده است که به ترتیب جابجایی در راستای طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند. جهت ادامه مدلسازی، باید کرنش‌ها بصورت منطقی برای لوله ساده شوند. با توجه به اینکه لوله مورد تحلیل در این پروژه با استفاده از تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو مدل شده است، بنابراین این دو مدل و روش بدست آوردن معادلات حاکمه بطور مفصل در ادامه ارائه شده است.

## مدل تیر اویلر- برنولی

با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی میدان جابجایی برای بصورت زیر می باشد [۲۹]:

$$\tilde{U}(x, z, t) = U(x, t) + z \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}; \quad (2-2)$$

$$\tilde{V}(x, z, t) = 0$$

$$\tilde{W}(x, z, t) = W(x, t).$$

در حالی که  $U$ ،  $V$  و  $W$  جابجایی نقاط صفحه میانی در راستای طولی، محیطی و شعایی هستند. با استفاده از تئوری اویلر و روابط کرنش-تغییر مکان، مولفه کرنش  $\varepsilon_{xx}$  در یک نقطه دلخواه از لوله به کرنشهای سطح میانی لوله  $\varepsilon_{xm}$  و تغییرات انحناء و پیچش سطح میانی  $k_x$ ، مرتبط می گردد که عبارتست از:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xm} + zk_x, \quad (3-2)$$

سرانجام، کرنش بصورت مجموع ترم های خطی، غیر خطی و تغییرات انحناء از رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_x\}_{pipe} &= \{\varepsilon_{xm}\}_L + \{\varepsilon_{xm}\}_{NL} - z\{k_x\} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \end{aligned} \quad (4-2)$$

## ۲-۳- معادلات تنش - کرنش

در این تحقیق جنس لوله از پلی اتیلن بوده و از قانون هوک پیروی می کند. طبق قانون هوک رابطه بین تنش-کرنش بطور کلی بصورت زیر نوشته می شود:

$$[\sigma]^{6 \times 1} = [C]^{6 \times 6} [\varepsilon]^{6 \times 1}, \quad (5-2)$$

$$[\varepsilon]^{6 \times 1} = [S]^{6 \times 6} [\sigma]^{6 \times 1},$$

ماتریس  $[C]$  و  $[S]$  به ترتیب ماتریس سختی و نرمی نامیده می شوند و داریم:

$$[C] = [S]^{-1}, \quad (6-2)$$

درایه های این دو ماتریس متقارن می باشند ( $c_{ij} = c_{ji}$  و  $s_{ij} = s_{ji}$ ) بنابراین دارای حداکثر ۲۱ ضریب مستقل می باشند. این ماتریس ها در حالت های خاصی می توانند ساده تر بشوند. این حالات عبارتند از:

۱- ماده به طور کامل غیریکنواخت: هنگامی که هیچ صفحه مقارنی برای خصوصیات ماده وجود

نداشته باشد. در این حالت تعداد ضرایب مستقل ماتریس سختی ۲۱ عدد می باشد.

۲- ماده تک خطی: هنگامی که برای ماده مورد استفاده یک صفحه تقارن وجود داشته باشد. در این

حالت تعداد ضرایب مستقل ماتریس سختی به ۱۳ ضریب کاهش می یابد.

۳- ماده دارای خواص متعامد: اگر ماده نسبت به دو صفحه عمود برهم دارای خصوصیات تقارن

باشد تقارن به صفحه عمود سوم نیز گسترش می یابد (سه صفحه متقارن - متعامد) که به آن ماده

اورتوتروپیک می‌گویند در این حالت تعداد ضرایب مستقل ماتریس سختی به ۹ ضریب کاهش می‌یابد.

۴- ماده ایزوتروپیک عرضی: اگر در ماده اورتوتروپ یک یکی از صفحات متقارن رفتار ایزوتروپ داشته باشد یعنی خصوصیات مکانیکی در تمامی جهات این صفحه یکسان باشد ماده را ایزوتروپیک عرضی می‌گویند. در این حالت تعداد ضرایب مستقل ماتریس سختی به ۵ ضریب کاهش می‌یابد که عموماً برای مواد پیزوالکتریک استفاده می‌شود.

۵- ماده ایزوتروپیک: هنگامی که تعداد صفحات تقارن ماده نامحدود باشد ماده ایزوتروپ می‌باشد. کامپوزیت‌هایی که دارای تعداد زیادی صفحه الیافی منظم می‌باشند از این دسته هستند. در این حالت تعداد ضرایب مستقل ماتریس سختی به ۲ ضریب کاهش می‌یابد. که عموماً برای مواد فلزات استفاده می‌شود.

در این تحقیق لوله گاز بصورت ارتوتروپیک در نظر گرفته شده است. بنابر این روابط تنش- کرنش برای لوله عبارت است از:

$$\sigma_x = C_{11}\epsilon_x, \quad (7-2)$$

## ۲-۴- روش انرژی

یکی از روش های کلی و جامع برای بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم، نوشتن انرژیهای کلی و اعمال اصل همپلتون می باشد. قبل از نوشتن انرژی سیستم لازم است نیروها و ممانهای داخلی تعریف گردد.

### ۲-۴-۱- تئوری لایه ای

در تئوری کلاسیک لایه ای همانگونه که توسط جونز [۳۰] و ویتنی [۳۱] برای لایه های معمولی بیان شده، فرض های زیر در نظر گرفته می شود:

یک چند لایه، از لایه های مختلفی تشکیل شده که به طور ایده آل با پیوندهای بسیار باریک و عرضی مقاوم به هم متصل شده اند.

همچنین، برای لایه های به اندازه کافی باریک، فرضیات سینماتیکی که تحت عنوان فرضیات کیرشهف-لاو بیان می شود صادق است:

کرنش عمودی و کرنش های برشی که در عرض لایه هستند کوچک و قابل صرف نظر می باشند. با در نظر گرفتن یک خط مستقیم که دو نقطه مقابل از دو سطح لایه را به هم متصل می کند، این فرضیه بیان می دارد که تحت تغییر شکل، این خط طول خود را حفظ می کند و عمود بر خط میانی لایه، مستقیم باقی می ماند. این تغییر شکل ها به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_s \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ \gamma_{xs}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_s \\ \psi_{xs} \end{Bmatrix}. \quad (8-2)$$

کرنش‌ها در طول ضخامت لایه متغیرهای خطی هستند که با  $\varepsilon^0$  که مربوط به سطح میانی لایه است و  $\kappa z$  بیان می‌شود. تنش‌های هر لایه دارای متجه درون صفحه‌ای  $N$  و برون صفحه‌ای  $M$  هستند که با انتگرال گیری روی ضخامت لایه بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} dz, \quad (9-2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz, \quad (10-2)$$

## ۲-۴-۲- انرژی پتانسیل لوله

انرژی پتانسیل لوله بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \int_V (\sigma_{xs} \varepsilon_x) dV, \quad (11-2)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۴) در رابطه فوق، انرژی لوله به صورت زیر در می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \int_{A_1} \left[ \sigma_x \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} \right] dA dx \right] \quad (12-2)$$

با استفاده از روابط (۲-۹) و (۲-۱۰) و سپس انتگرال گیری از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N_{x1} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{2} N_{x1} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 - M_{x1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right\} dx \quad (13-2)$$

با انتگرال گیری از معادله (۷-۲) در راستای ضخامت و استفاده از رابطه (۹-۲) تا (۱۰-۲)، روابط نیروها و ممان های داخلی لوله را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$N_{xs} = \left( hC_{11} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + 0.5 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \right), \quad (14-2)$$

$$M_{xs} = \frac{h^3}{12} \left( C_{11} \left( -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right). \quad (15-2)$$

## ۲-۴-۳- انرژی جنبشی لوله

انرژی جنبشی لوله بصورت زیر نوشته می شود:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[ \int_{A_1} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} - Z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dA \right] dx \quad (16-2)$$

## ۲-۴-۴- کار خارجی ناشی از محیط الاستیک

محیط الاستیک اطراف لوله شامل فنر های عمودی وینکلر و برشی پاسترناک می باشد [۱۵].

نیروی معادل این محیط مطابق با رابطه زیر بدست می آید:

$$F = -K_w W + G_p \nabla^2 W, \quad (17-2)$$

در رابطه فوق،  $K_w$  و  $G_p$  بترتیب ضریب فنریت عمودی وینکلر و برشی پاسترناک می‌باشند بنابراین کار خارجی محیط الاستیک  $W$  به صورت زیر در می‌آید:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (-K_w + G_p \nabla^2) W^2 dx. \quad (18-2)$$

## ۲-۴-۵- کار خارجی ناشی از جریان سیال

با در نظر گرفتن سیال ویسکوز و غیر قابل تراکم معادله حاکم بر رفتار سیال بصورت زیر می‌باشد که به معادله ناویر استوکس مشهور است [۳۲].

$$\rho_f \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \mathbf{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F}_{body}, \quad (19-2)$$

در رابطه فوق  $\mathbf{V}$  بردار سرعت سیال در مختصات استوانه‌ای در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی می‌باشد. همچنین  $\mathbf{P}$ ،  $\mu$  و  $\rho_f$  بترتیب فشار، ویسکوزیته و چگالی سیال بوده و  $\mathbf{F}_{body}$  نیروی حجمی می‌باشد. در رابطه ناویر استوکس عملگر مشتق کامل بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (20-2)$$

در نقطه تماس بین سیال و داخل هسته، سرعت نسبی و شتاب در جهت جابجایی شعاعی برابر می‌شود. بنابراین:

$$V_z = \frac{\partial W_1}{\partial t} - U_f \sin \theta = \frac{\partial W_1}{\partial t} + U_f \frac{\partial W_1}{\partial x} \quad (21-2)$$

اگر دو طرف تساوی فوق را در سطح داخل لوله ( $A$ ) ضرب کنیم، نیروی شعاعی در لوله محاسبه می‌شود:



$$\begin{aligned}
m_f \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_f \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial W_1}{\partial t} - U_f \sin \theta \right] &= -\nabla P \cdot A_f + \mu A_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial W_1}{\partial t} - U_f \sin \theta \right] \\
m_f \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + m_f U_f \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial t} \cos \theta + m_f U_f \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial t} + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \cos \theta &= \\
-\nabla P \cdot A_f + \mu A_f \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^2 \partial t} + U_f \mu A_f \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^3} \cos \theta + U_f \mu A_f \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right)^2 \sin \theta &
\end{aligned} \tag{۲۲-۲}$$

نهایتاً کار خارجی ناشی از فشار سیال طبق رابطه زیر تعیین می گردد:

$$W = \int (F_{fluid}) w dz, \tag{۲۳-۲}$$

## ۲-۵- اعمال اصل همیلتون

در بخش قبلی تمامی انرژی های سیستم محاسبه گردید. اصل همیلتون به صورت زیر بیان

می شود [۲۹]:

$$\begin{aligned}
\delta \int_0^t (K - \Pi) dt &= 0 \\
\Pi &= U - V \\
\delta \int_0^t (K - U + V) dt &= 0 \Rightarrow \int_0^t (\delta K - \delta U + \delta V) dt = 0
\end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

$K, U$  بترتیب انرژی های پتانسیل و جنبشی لوله بوده و  $V$  کار خارجی ناشی از محیط الاستیک و سیال داخل هسته می باشد که باید تغییرات آنها محاسبه گردد.

تغییرات انرژی پتانسیل:

$$\delta U = \int_0^t \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \delta W - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta W \right\} dx \tag{۲۵-۲}$$

تغییرات انرژی جنبشی:

$$\delta K = \rho \int_0^L \left[ \int_A \left\{ -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U + Z^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} \delta W - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W \right\} dA dx \right] \quad (26-2)$$

تغییرات کار خارجی:

$$\delta W = \int_0^L \left\{ -m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \delta W - m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta \delta U \right\} dx \quad (27-2)$$

$$+ \int_0^L \left\{ -K_w W + G_p \nabla^2 W \right\} \delta W dx$$

## ۶-۲- معادلات متشکله

حال با اعمال اصل همپلتون و استفاده از انتگرال جزء به جزء و مرتب کردن روابط در راستای

جابجایی های مکانیکی، سه معادله حاکمه بصورت زیر بدست می آیند:

معادله اول: با جداسازی ضرائب  $\delta U$  داریم:

$$\delta U_1 : \quad (28-2)$$

$$-\frac{N_x}{\partial x} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \sin \theta + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta$$

$$= \mu A_f \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + \mu A_f U_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \sin \theta - \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \cos \theta$$

معادله دوم: با جداسازی ضرائب  $\delta W$  داریم:

$\delta W_1$  :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} - N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \rho_f I_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_f + m_1) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\
 & + 2U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \cos \theta + U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial t} \sin \theta - U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} \cos \theta \\
 & + U_f m_f \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \sin \theta - \rho_f I_f \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \\
 & = \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \cos \theta + \mu U_f A_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \sin \theta + \mu U A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t}
 \end{aligned} \tag{۲۹-۲}$$

حال با جایگذاری معادله های (۱۴-۲) و (۱۵-۲) در معادلات (۲۸-۲) و (۲۹-۲)، روابط متشکله

بر حسب جابجایی های مکانیکی بدست می آید. این روابط عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{E}{1-\nu^2} A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu^2} A \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} \\
 & + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} - \mu A_f \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu A_f U_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \frac{\partial W}{\partial x} + \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{۳۰-۲}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{E}{1-\nu^2} A \frac{\partial U^2}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{3E}{2(1-\nu^2)} A \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu^2} A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\
 & -\frac{E}{1-\nu^2} I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho_f I_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \\
 & + m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial t} - m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} + m_f U_f \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} \\
 & - \rho_f I_f \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \\
 & - \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x} - \mu A_f U_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} = 0
 \end{aligned} \tag{۳۱-۲}$$

## ۷-۲- معادلات حاکمه بی بعد

برای تحلیل بهتر و جامع تر باید کلیه روابط را بی بعد کرد که برای این منظور ابتدا گروه های

بدون بعد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{x}{L} & (w, u) &= \frac{(W, U)}{r} & \eta &= \frac{L}{r} & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{r\sqrt{E\rho_f}} \\
 \bar{I} &= \frac{\rho I}{\rho A r^2} & \tau &= \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho_t}} & u_f &= \sqrt{\frac{\rho_f}{E}} U_f \\
 f &= \frac{EA_f}{EA} & \bar{\rho} &= \frac{\rho_f}{\rho_t} & \bar{C} &= \frac{Cl^2}{EA} \\
 \bar{K}_w &= \frac{K_w L^2}{EA} & \bar{G}_p &= \frac{G_p}{EA} & \beta &= \frac{K_s GA}{EA}
 \end{aligned} \tag{۳۲-۲}$$

با استفاده از روابط فوق، معادلات حاکمه به شکل زیر در می آیند:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + (1 + \bar{\rho} f) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \\
 & \sqrt{\bar{\rho}} f u_f \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \xi} - f u_f^2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f \frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \tau} \\
 & + f \bar{\mu} u_f \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \frac{\partial w}{\partial \xi} + f \bar{\mu} u_f \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{۳۳-۲}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\eta}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\
& - \frac{\bar{I}_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \bar{I}_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + (1+f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta \partial \tau} \\
& + \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta \partial \tau} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \\
& - \bar{\rho} f_1 \bar{I}_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + f_1 u_f^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} - f_1 \bar{\mu} u_f \left(\frac{1}{\eta_1}\right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \zeta^3} \\
& - f_1 u_f \bar{\mu} \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^3 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2}\right)^2 \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \bar{\mu} \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \tau} = 0.
\end{aligned} \tag{۳۴-۲}$$

## مدل تیر تیموشنکو

با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو میدان جابجایی بصورت زیر می باشد [۳۳]:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(x, z, t) &= U(x, t) + z\psi(x, t) \\
\tilde{W}(x, z, t) &= W(x, t)
\end{aligned} \tag{۳۵-۲}$$

روابط کرنش-جابجایی برای تیر تیموشنکو به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \psi
\end{aligned} \tag{۳۶-۲}$$

جاییکه  $\psi$  چرخش حول محور طولی تیر ( $x$ ) می باشد.

## ۸-۲- معادلات تنش - کرنش

مانند فصل قبل روابط تنش و کرنش برای لوله گاز را می توان به صورت زیر نوشت:

$$[\sigma]^{6 \times 1} = [C]^{6 \times 6} [\varepsilon]^{6 \times 1}, \quad (2-37)$$

$$[\varepsilon]^{6 \times 1} = [S]^{6 \times 6} [\sigma]^{6 \times 1},$$

ماتریس  $[C]$  و  $[S]$  به ترتیب ماتریس سختی و نرمی نامیده می شوند. در این تحقیق لوله گاز بصورت ارتوتروپیک در نظر گرفته شده است. بنابراین رو ابط تنش- کرنش برای لوله عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \varepsilon_x \\ \sigma_{xz} &= C_{55} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} + \psi \right] \end{aligned} \quad (2-38)$$

## ۲-۹- روش انرژی

همانند آنچه در فصل قبل برای تیر اویلر-برنولی ذکر شد، انرژی پتانسیل کل  $\Pi$ ، از مجموع انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی ناشی از بارهای خارجی حاصل می شود.

$$\Pi = U - (K + \Omega) \quad (2-39)$$

که  $U$ ،  $K$  و  $\Omega$  به ترتیب بیانگر انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی ناشی از بار خارجی است.

## ۲-۹-۱- انرژی کرنشی

$U$  انرژی پتانسیل کرنشی برای لوله در مدل تیر تیموشنکو برابر است با:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_i} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dA_i dx \quad (۴۰-۲)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۳۶) در (۲-۴۰)، مجموع انرژی کرنشی برای هر دو لایه بدست می آید

:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left\{ \sigma_x \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \sigma_{xz} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} + \psi \right] \right\} dA dx \quad (۴۱-۲)$$

از آنجا که:

$$N_{xi} = \int_A \sigma_{xi} dA$$

$$M_{xi} = \int_A \sigma_{xx} z dA$$

$$Q_{xi} = \int_A \sigma_{xz} dA$$

(۴۲-۲)

معادله (۲-۴۱) به صورت زیر در می آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N_x \frac{\partial U}{\partial x} + M_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} N_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + Q_x \frac{\partial W}{\partial x} + Q_x \psi \right\} dx \quad (۴۳-۲)$$

## ۲-۹-۲- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی لوله حاوی سیال به صورت زیر نوشته می شود:

$$K_{tube} = \frac{1}{2} \rho_t \int_0^L \left[ \int_A \left[ \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \right)^2 \right] dA \right] dx \quad (۴۴-۲)$$

با جایگذاری معادله (۲-۳۵) در (۲-۴۴)، انرژی جنبشی به شکل زیر نوشته می شود:

$$K_{tube} = \frac{1}{2} \rho_t \int_0^L \int_A \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} + z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dA \, dx \quad (۴۵-۲)$$

## ۲-۹-۳- کار خارجی سیال عبوری بر جداره ی داخلی

کار خارجی سیال مانند بخش قبل در نتیجه ی نیروی جانب مرکز به شکل زیر نوشته می شود:

$$\delta \Omega_{fluid} = - \int_0^L \int_{A_f} \left\{ m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \, \delta W + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta \, \delta U \right\} dA_f \, dx \quad (۴۶-۲)$$

## ۲-۹-۴- کار خارجی محیط الاستیک

در این بخش نیز اثر محیط الاستیک با توجه به مدل وینکلر و پاسترناک بررسی شده است،

بنابراین، نیروی وارد شده از طرف محیط الاستیک به جداره خارجی لوله برابر است با

$$F_{Elastic \, Medium} = K_w W - G_p \nabla^2 W \quad (۴۷-۲)$$



جاییکه  $K_w$  ثابت فنر برای مدل وینکلر و  $G_p$  مدول برشی مربوط به مدل پاسترناک است. با

توجه به روابط فوق کار خارجی وارد بر لوله مانند تیر اویلر-برنولی برابر است با:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^L (-K_w + G_p \nabla^2) W^2 dx \quad (48-2)$$

## ۲-۱۰- اصل هامیلتون

این بار هم معادلات حرکت با استفاده از اصل هامیلتون برای لوله احاطه شده توسط محیط

الاستیک، محاسبه می شود.

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta U - (\delta K_{tube} + \delta \Omega)] = 0 \quad (49-2)$$

که در رابطه فوق:

تغییرات انرژی پتانسیل:

$$\delta U = \int_0^l \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta U - \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \psi - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta W + Q_x \delta \psi \right\} dx \quad (50-2)$$

تغییرات انرژی جنبشی:

$$\delta K_{tube} = \rho_t \int_0^L \left[ \int_A \left\{ -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \delta \psi - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W \right\} dA \right] dx \quad (51-2)$$

تغییرات کار خارجی:

$$\delta W = \int_0^L \left\{ -m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \delta W - m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta \delta U \right\} dx \quad (52-2)$$

$$+ \int_0^L \left\{ -K_w W + G_p \nabla^2 W \right\} \delta W dx$$

## ۱۱-۲- معادلات متشکله

حال با اعمال اصل همیلتون و استفاده از انتگرال جزء به جزء و مرتب کردن روابط در راستای

جابجایی های مکانیکی، سه معادله حاکمه بصورت زیر بدست می آیند:

معادله اول: با جداسازی ضرائب  $\delta U$  داریم:

$$-\frac{N_x}{\partial x} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + U_f m_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \sin \theta \quad (53-2)$$

$$+ m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta = \mu A_f \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + \mu A_f U_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \sin \theta - \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \cos \theta$$

معادله دوم: با جداسازی ضرائب  $\delta W$  داریم:

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} - N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_f \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + m_f U_f \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \sin \theta$$

$$- m_f U_f \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta + m_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \cos \theta \quad (54-2)$$

$$- m_f U_f \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin \theta + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta$$

$$= \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \cos \theta + \mu U_f A_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \sin \theta + \mu U A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t}$$

معادله سوم: با جداسازی ضرائب  $\delta W$  داریم:

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x + (I + I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (55-2)$$

حال با جایگذاری معادله (۳۶-۲) در معادله (۳۸-۲) خواهیم داشت:

$$\sigma_{xx} = C_{11} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + Z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (56-2)$$

از آنجا که  $N_x = \int_A \sigma_x dA$  می توان نوشت:

$$N_x = C_{11} A \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{11} A \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \quad (57-2)$$

و با توجه  $M_x = \int_A \sigma_x z dA$  و  $I = \int_A z^2 dA$ ، ممان به شکل زیر در می آید:

$$M_x = -C_{11} I \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (58-2)$$

با ترکیب معادلات (۵۶-۲) و (۵۷-۲) و (۵۸-۲) با معادلات مربوط به ضرایب  $\delta U_i$ ،  $\delta W_i$  و  $\delta \phi_i$ ،

معادلات نهایی حرکت به صورت زیر حاصل می شود:

معادله ی مربوط به ضرایب  $\delta U_1$ :

$$-\frac{E}{1-\nu^2} A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu^2} A_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \frac{\partial W_1}{\partial x} - U_f m_f \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial t} \frac{\partial W_1}{\partial x} \quad (59-2)$$

$$- m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \frac{\partial W_1}{\partial x} - \mu A_f \frac{\partial^3 U_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu A_f U_f \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^3} \frac{\partial W_1}{\partial x} + \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right)^2 = 0$$

معادله ی مربوط به ضرایب  $\delta W_1$ :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial W}{\partial x} - m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} \sin \theta + \mu A_f \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} \\
& - m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} \sin \theta - \frac{E}{1-\nu^2} A \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} A \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\
& + \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \frac{\partial W}{\partial x} \sin \theta - \mu U_f A_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x} \cos \theta \\
& + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \cos \theta + m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial t} \sin \theta \\
& - m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} \cos \theta + m_f U_f \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \sin \theta + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \\
& - \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \cos \theta - \mu A_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \sin \theta - \mu A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} = 0
\end{aligned} \tag{۶۰-۲}$$

با استفاده از تقریب  $\sin \theta \approx \theta = -\frac{\partial W}{\partial x}$  و  $\cos \theta \approx 1$  با توجه به کوچک بودن زاویه  $\theta$ ، ساده

شده معادله ی فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& -K_s GA \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial W}{\partial x} + m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\
& + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} A \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\
& + 2m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} - m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial t} - m_f U_f \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} - m_f U_f \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} \\
& + m_f U_f^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu A_f \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial W}{\partial x} - \mu A_f U_f \frac{\partial W^3}{\partial x^3} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\
& - \mu A_f U_f \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x} - \mu U_f A_f \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0
\end{aligned} \tag{۶۱-۲}$$

معادله ی مربوط به ضرایب  $\delta \psi_1$ :

$$C_{11} I_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K_s GA \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \psi \right) + (\rho_t I + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{۶۲-۲}$$

## ۱۲-۲- معادلات حاکمه بی بعد

برای تحلیل بهتر و جامع تر باید کلیه روابط را بی بعد کرد که برای این منظور ابتدا گروه های

بدون بعد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{x}{L} & (w, u) &= \frac{(W, U)}{r} & \eta &= \frac{L}{r} & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{r\sqrt{E\rho_f}} \\
 \bar{I} &= \frac{\rho I}{\rho A r^2} & \tau &= \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho_t}} & u_f &= \sqrt{\frac{\rho_f}{E}} U_f & \psi &= \bar{\psi} \\
 f &= \frac{EA_f}{EA} & \bar{\rho} &= \frac{\rho_f}{\rho_t} & \bar{C} &= \frac{Cl^2}{EA} & & \\
 \bar{K}_w &= \frac{K_w L^2}{EA} & \bar{G}_p &= \frac{G_p}{EA} & \beta &= \frac{K_s GA}{EA} & & 
 \end{aligned} \tag{۶۳-۲}$$

با استفاده از روابط فوق، معادلات حاکمه به شکل زیر در می آیند:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + (1 + \bar{\rho} f_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \\
 & - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - f_1 u_f^2 \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \\
 & - \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \xi^2 \partial \tau} + f_1 \bar{\mu} u_f \left( \frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0
 \end{aligned} \tag{۶۴-۲}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \eta \beta_1 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \zeta} - (1 + \bar{\rho} f_1) \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \tau} \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \\
& + f_1 u_f^2 \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 - \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\
& + (1 + f_1 \bar{\rho}) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \tau} - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \left( \frac{1}{\eta_1} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial \tau} \\
& - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 u_f \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + f_1 u_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\
& - \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \bar{\mu} \frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^2 \partial \tau} + \bar{\mu} \sqrt{\bar{\rho}} f_1 \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^2 \partial \tau} \frac{\partial w^2}{\partial \zeta} - f_1 u_f \bar{\mu} \left( \frac{1}{\eta} \right)^3 \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \\
& - f_1 u_f \bar{\mu} \left( \frac{1}{\eta} \right)^3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} - f_1 \bar{\mu} u_f \left( \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} + f_1 \bar{\mu} u_f \left( \frac{1}{\eta} \right)^3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \\
& \frac{E}{1 - \nu^2} \bar{I} \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \zeta^2} + \beta_1 \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \beta_1 \bar{\psi} + (\bar{I} + \bar{\rho}_f \bar{I}_f) \left( \frac{1}{\eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} = 0
\end{aligned} \tag{۶۵-۲}$$

### ۱۳-۲- مدل موری-تاناکا

در این بخش خواص و ضرایب الاستیک کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره از دیدگاه مدل موری-تاناکا مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که پلیمر الاستیک و ایزوتروپ بوده و مدول یانگ و ضریب پواسون آن به ترتیب  $E_m$  و  $\nu_m$  می‌باشد. الیاف نانولوله‌های کربنی تک‌جداره بلند، هم‌ردیف و منظم دارای خواص الاستیک عرضی فرض می‌شوند در نتیجه کامپوزیت پلیمری مورد نظر دارای خواص الاستیک عرضی می‌باشد. رابطه تنش- کرنش در مختصات محلی یک المان اولیه بر اساس مدل موری-تاناکا به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k+m & l & k-m & 0 & 0 & 0 \\ l & n & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & l & k+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (66-2)$$

در رابطه بالا  $k, l, m, n, p$  مدول های الاستیک هیل هستند که  $k$  مدول حجمی کرنش

صفحه ای عمود بر جهت الیاف،  $n$  مدول کششی غیرمحوری در جهت طولی الیافها،  $l$  مدول

وابسته به سطح مقطع،  $m$  و  $p$  به ترتیب مدول برشی در صفحات موازی و قائم بر جهت الیافها

هستند که برای نانولوله های کربنی با در نظر گرفتن آنها به عنوان ماده ایزوتروپ عرضی ارائه شده

اند [34]. مدول های الاستیک هیل با استفاده از روش موری - تاناکا به صورت رابطه زیر بدست

می آیند [35]:

$$\begin{aligned} k &= \frac{E_m \{E_m c_m + 2k_r(1+\nu_m)[1+c_r(1-2\nu_m)]\}}{2(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m) + 2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \\ l &= \frac{E_m \{c_m \nu_m [E_m + 2k_r(1+\nu_m)] + 2c_r l_r(1-\nu_m^2)\}}{(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m) + 2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \\ n &= \frac{E_m^2 c_m(1+c_r-c_m \nu_m) + 2c_m c_r(k_r n_r - l_r^2)(1+\nu_m)^2(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m) + 2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \\ &\quad + \frac{E_m [2c_m^2 k_r(1-\nu_m) + c_r n_r(1+c_r-2\nu_m) - 4c_m l_r \nu_m]}{E_m(1+c_r-2\nu_m) + 2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)} \\ p &= \frac{E_m [E_m c_m + 2p_r(1+\nu_m)(1+c_r)]}{2(1+\nu_m)[E_m(1+c_r) + 2c_m p_r(1+\nu_m)]} \\ m &= \frac{E_m [E_m c_m + 2m_r(1+\nu_m)(3+c_r-4\nu_m)]}{2(1+\nu_m)\{E_m [c_m + 4c_r(1-\nu_m)] + 2c_m m_r(3-\nu_m-4\nu_m^2)\}} \end{aligned} \quad (67-2)$$

در رابطه های بالا  $k_r, l_r, n_r, p_r, m_r$  مدول الاستیسیته هیل برای فاز تقویت شده بوده است

که برای نانولوله کربنی تک جداره با شعاع ۲ آنگسترم طبق جدول (۱-۲) بدست می آید، مدول  $E_m$

یانگ و  $\nu_m$  ضریب پواسون پلیمر می باشند.

جدول ۱-۲- ثوابت ماده کامپوزیتی [۳۴]

مقدار	واحد	ثابت عددی
$E_m$	GPa	۱/۹
$\nu_m$	-	۰/۳
$k_r$	GPa	۳۰
$l_r$	GPa	۱۰
$m_r$	GPa	۱
$n_r$	GPa	۴۵۰
$p_r$	GPa	۱

در نهایت با محاسبه پارامترهای  $k, l, m, n, p$  در رابطه (۲-۶۷) ضرایب الاستیک بدست می آید.

## ۲-۱۴- شرط مرزی

لازم به ذکر است که در این پروژه از شرط مرزی گیر دار در دو طرف لوله استفاده شده است

که به صورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{aligned}
 w = \Psi = u = 0 & \quad @ \quad x = 0, L \\
 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \quad @ \quad x = 0, L
 \end{aligned}
 \tag{۲-۶۸}$$



با توجه به اینکه معادلات حاکمه غیر خطی هستند، روش حل تحلیلی برای آن وجود ندارد. بنابراین این باید از روش های عددی استفاده شود که در این پروژه روش تفاضلات مربعی به دلیل دقت بالا انتخاب شده است. این روش در فصل بعد به طور مفصل توضیح داده خواهد شد.

## فصل سوم: روش عددی DQM

### ۳-۱- مقدمه

بسیاری از سازه هایی که در ساختارهای مکانیک، نفت و گاز، عمران، هوافضا و نظامی به کار می روند، از لحاظ ریاضی با لوله های استوانه ای مدل می شود. این لوله ها اغلب برای ذخیره سازی و انتقال گازهای پر فشار و مایعات در صنایع مهم نفت، گاز و در سیستم های مختلف هیدرولیکی به کار می روند. بنابراین، درک درست در مورد رفتار مکانیکی چنین ساختارهایی شامل ارتعاشات، انتشار موج، کمانش، خمش و ... برای طراحی خوب و کاربردهای لوله های استوانه ای در آزمایشات مهندسی ضروری است.

آنالیز ارتعاشات لوله های استوانه ای توسط بسیاری از محققان مطالعه شده است که در فصل اول به آن پرداخته شد. بطور کلی، روش های آنالیز مسائل مکانیکی به دو دسته تحلیلی و عددی تقسیم بندی می شود. بدست آوردن حل تحلیلی و بسته معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مهندسی عموماً بسیار دشوار می باشد. بنابراین استفاده از روش های عددی جهت حل معادلات دیفرانسیل سیستم های مهندسی گسترش یافته است. روشهای عددی، بطور کلی در صدد تبدیل

معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی حاکم به یکسری از معادلات جبری مرتبه اول با استفاده از فرمول بندیه‌های دیفرانسیلی یا انتگرالی هستند. این معادلات جبری مرتبه اول که قابل مقایسه با معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی حاکم هستند، بر اساس مقادیر گسسته متغیری که در میدان تابع تعریف شده است و در نقاط مجزا و از پیش تعیین شده‌ای که در دامنه جواب تابع هستند، بیان می‌شوند.

روش‌های عددی همچون المان محدود، تفاضل محدود، ریتز و المان مرزی به شرط انتخاب کافی و مناسب نقاط شبکه، می‌تواند برای حل اکثر مسائل مهندسی مفید باشد. بعلاوه، بدست آوردن دقت قابل قبول در روش‌های ذکر شده برای حل تعداد زیادی معادله، نیازمند انتخاب تعداد زیادی نقاط شبکه می‌باشد. لازم به ذکر است که از بین روش‌های ذکر شده، هنوز روش المان محدود یک روش کارآمد برای سیستم‌های پیچیده از لحاظ هندسی، بارگذاری و غیر خطی بودن می‌باشد.

یکی از روش‌هایی که به تعداد نقاط شبکه کمتری برای رسیدن به دقت خوب نیاز دارد، روش تفاضلات مربعی می‌باشد که توسط بلمن [۳۶] و همکارانش معرفی گردید. سپس، کاربردهای این روش در مسائل مهندسی گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج حاکی از پتانسیل عالی روش تفاضلات مربعی برای به دست آوردن جواب‌های منطقی و قابل قبول داشت. اخیراً، استفاده از این روش برای آنالیز ارتعاشات، انتشار موج و کماتش ساختارهای خطی و غیر خطی سازه‌ها گسترش یافته است. شو و دو [۳۷]، هفت چناری و همکارانش [۳۸] به همراه درویزه و همکارانش [۳۹] از روش تفاضلات مربعی برای بررسی ارتعاشات و پایداری خطی لوله استوانه‌ای کامپوزیتی تحت شرایط مرزی مختلف، استفاده نمودند. نتایج آن‌ها نشان از دقت مناسب این

روش داشت. مطالعه رفتار ارتعاشی لوله استوانه ای ارتوتروپیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و آزاد-آزاد توسط لوی و همکارانش [۴۰] با استفاده از روش تفاضلات مربعی انجام شد. هووا و لام [۴۱] اثر ارتوتروپ بودن ماده روی فرکانس لوله کامپوزیتی را با استفاده از این روش بررسی نمود. تمامی کارهایی که در بالا ذکر شد برای تحلیل ارتعاشات خطی لوله استوانه ای می باشد. در زمینه ارتعاشات و انتشار موج غیرخطی تا به حال هیچ محققى کار نکرده است.

### ۳-۲- معرفی روش تفاضلات مربعی

روش تفاضلات مربعی از جمله روشهای عددی است که در آن با استفاده از ضرایب وزنی معادلات دیفرانسیلی حاکم، به دسته ای از معادلات جبری مرتبه اول تبدیل می شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق بصورت یک مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه و در جهت محورهای مختصات بیان خواهند شد. رابطه اصلی این روش ها برای حالت یک بعدی، به شکل زیر بیان می شود:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \rightarrow = \sum_{j=1}^N C_{ij} f_j \quad (1-3)$$

بطوریکه:

$f(x)$ : تابع مورد نظر

$N$ : تعداد نقاط نمونه

$x_i$ : نقطه نمونه  $i$  ام از بازه تابع

$f_i$ : مقدار تابع در نقطه نمونه  $i$  ام

$C_{ij}$ : ضرایب وزنی برای بدست آوردن مشتق تابع در نقطه نمونه  $i$  ام

بطور کلی در این روش ها، مشتق تابع در حالت یک بعدی و دو بعدی به صورت زیر تعریف می-گردد:

الف) اگر  $f$  تابعی از  $x$  باشد:

$$\frac{d^n f(x_i)}{dx^n} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (2-3)$$

ب) اگر  $f$  تابعی از  $x$  و  $\theta$  باشد:

$$\frac{d^n f_x(x_i, \theta_j)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(n)} f(x_k, \theta_j) \quad n = 1, \dots, N_x - 1. \quad (3-3)$$

$$\frac{d^m f_y(x_i, \theta_j)}{d\theta^m} = \sum_{l=1}^{N_\theta} B_{jl}^{(m)} f(x_i, \theta_l) \quad m = 1, \dots, N_\theta - 1. \quad (4-3)$$

$$\frac{d^{n+m} f_{xy}(x_i, \theta_j)}{dx^n d\theta^m} = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_\theta} A_{ik}^{(n)} B_{jl}^{(m)} f(x_k, \theta_l). \quad (5-3)$$

بنابراین مشاهده می شود که دو عامل بسیار مهم و تعیین کننده در دقت روش تفاضلات مربعی، انتخاب نقاط نمونه و ضرایب وزنی می باشند که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد.

### ۳-۲-۱- انتخاب نقاط نمونه:

نحوه انتخاب نقاط نمونه یکی از مهمترین پارامترهای موثر در دقت جوابهاست. چند روش برای انتخاب نقاط نمونه وجود دارد. اولین و ساده ترین روش این است که دامنه مسئله به  $N$  نقطه با فواصل مساوی تقسیم بندی شود. رابطه زیر این کار را انجام می دهد:

$$X_i = \frac{i-1}{N_x-1} L \quad i=1, \dots, N_x \quad (6-3)$$

$$\theta_i = \frac{i-1}{N_\theta-1} 2\pi \quad i=1, \dots, N_\theta \quad (7-3)$$

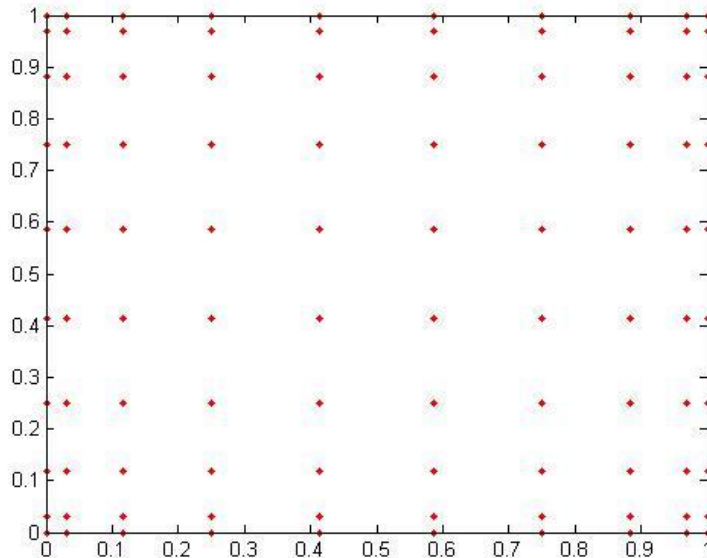
در عبارات فوق  $L$  معرف طول لوله و  $N_x$  و  $N_\theta$  بیان کننده تعداد گره‌ها در راستاهای  $x$  و  $\theta$  می‌باشد. معمولاً انتخاب نقاط با فواصل مساوی نتایج دقیقی به بار نمی آورد. تجربه نشان داده است که انتخاب نقطه نمونه با فواصل نامساوی به جواب های دقیق تری می انجامد. استفاده از ریشه های چند جمله ای های متعامد یکی از روشهای رایج در انتخاب نقاط نمونه با فواصل نامساوی می باشد. شبکه بندی با فواصل غیر مساوی به صورت شکل (۳-۱) خواهد بود. نباید تجمع نقاط در محل خاصی از بازه انجام گیرد. این اشکال در نقاط نمونه ای که بطور تصادفی انتخاب می شوند وجود دارد. ریشه های چند جمله ای متعامد در این مورد خوب عمل می کند. مثلاً ریشه های چند جمله ای چبیشف<sup>۱</sup> در حل مسائل مهندسی زیاد استفاده می شوند و نتایج خوبی به بار می آورند. این فاصله گذار بصورت زیر بیان می گردد:

---

<sup>۱</sup>.Chebyshev

$$X_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x - 1} \pi \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_x \quad (8-3)$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_\theta - 1} \pi \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_\theta \quad (9-3)$$



شکل ۳-۱- شبکه بندی با فواصل نامساوی

همان طور که مشاهده می شود گره ها در نزدیکی مرزها به هم نزدیکتر می باشند و در نقاط دور از مرز فاصله بیشتری از یکدیگر دارند. در مسائلی که مشتقات آنها از مراتب بالاتری است، نقاط نمونه بیشتری باید به کار برد. زیرا مشتقات با مراتب بالاتر به معنی تغییرات شدیدتر تابع می باشد. بنابراین برای جبران این تغییرات شدید باید نقاط نمونه بیشتری به کار گرفته شوند که البته حجم محاسبات را هم زیادتر خواهد کرد.

### ۳-۲-۲-توابع تست و اعمال روش تفاضلات مربعی

برای اعمال روش تفاضلات مربعی جهت حل یک معادله دیفرانسیل، باید مشتقات را همانگونه که گفته شد به صورت حاصلضرب ماتریسی ضرایب وزنی در بردار مجهولات نوشت. بنابراین باید به دنبال راه حلی برای بدست آوردن ماتریس ضرایب وزنی بود. روشهای مختلفی برای بدست آوردن ماتریس ضرایب وزنی پیشنهاد شده است. در این روشها تابع  $f$  تابعی معلوم فرض می شود. با انجام عمل مشتق گیری از این تابع و ارضای تساوی طرف راست و چپ معادله (۳-۱)، ضرایب وزنی بدست می آیند. این تابع که از آن برای پیدا کردن ضرایب وزنی استفاده می شود به تابع تست یا تابع آزمایش معروف است.

### ۳-۲-۲-۱-توابع تست روش تفاضلات مربعی:

بلمن [۳۶] پس از ابداع روش تفاضلات مربعی در سال ۱۹۷۱ دو راه برای بدست آوردن ضرایب وزنی معرفی کرد. راه حل اول روش گوس بود که با حل دستگاه، ضرایب وزنی محاسبه می شود. متأسفانه وقتی تعداد نقاط نمونه، یعنی  $N$  زیاد می شود، حل دستگاه دچار مشکل می شود. بلمن برای رفع این مشکل روش دوم خود را ارائه کرد. در این روش برای بدست آوردن یک ماتریس ضرایب وزنی، چند جمله ای انتقال یافته مرتبه  $N$  لاگرانژ به عنوان تابع تست استفاده شده است. نقاط نمونه در این روش ریشه های این چند جمله ای هستند. این یک مشکل بزرگ در استفاده از این روش است زیرا در این روش برای حل هر نوع مسئله ای، نقاط نمونه از پیش تعیین شده



است. در صورتیکه نقاط نمونه باید با توجه به نوع مسئله و شرایط فیزیکی حاکم بر آن و همچنین مرزهای آن مسئله انتخاب شوند.

روش اول پیشنهادی بلمن برای بدست آوردن ضرایب وزنی بیش از روش دوم وی مورد توجه علاقمندان روش تفاضلات مربعی قرار گرفت از آن جهت که در روش نخست، انتخاب نقاط نمونه کاملاً آزادانه است ولی در روش دوم نقاط نمونه محدود به ریشه های چند جمله ای لاگرانژ است. ولی همچنان که پیشتر اشاره شد با افزایش تعداد نقاط نمونه (بیش از ۱۲ نقطه)، دقت جوابها کاهش می یابد. دو راهکار بلمن برای بدست آوردن ضرایب وزنی در ادامه آورده شده است. این راهکارها برای توابع یک بعدی توضیح داده می شود که قابل تعمیم به توابع دو بعدی می باشد.

۳-۲-۱-۱-روش اول

در این روش، تابع  $g(x)$  به عنوان تابع تست انتخاب شده است:

$$g(x) = x^k, \quad k = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (10-3)$$

با جایگذاری این تابع در رابطه (۱-۳)،  $N$  معادله و  $N$  مجهول برای  $k=0$  تا  $k=(N-1)$  بدست می آید که با جایگذاری  $x_i$  در سمت راست و سپس حل آن،  $C_{ij}$  های سطر  $i$  ام ماتریس ضرائب وزنی بدست می آیند.

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} x_j^k = k x_i^{(k-1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, (N-1), N \quad (11-3)$$

به عنوان مثال با تقسیم دامنه مسئله به ۵ نقطه، ضرایب وزنی سطر  $i$  ام ماتریس ضرایب وزنی از

حل دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهول زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + C_{i4} + C_{i5} &= 0, \\ C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 + C_{i3}x_3 + C_{i4}x_4 + C_{i5}x_5 &= 1, \\ C_{i1}x_1^2 + C_{i2}x_2^2 + C_{i3}x_3^2 + C_{i4}x_4^2 + C_{i5}x_5^2 &= 2x_i, \\ C_{i1}x_1^3 + C_{i2}x_2^3 + C_{i3}x_3^3 + C_{i4}x_4^3 + C_{i5}x_5^3 &= 2x_i^2, \\ C_{i1}x_1^4 + C_{i2}x_2^4 + C_{i3}x_3^4 + C_{i4}x_4^4 + C_{i5}x_5^4 &= 4x_i^3. \end{aligned}$$

(۱۲-۳)

با تغییر  $i$  از یک تا  $N$  (در اینجا  $N=5$ )، ضرایب وزنی سطر اول تا  $N$  ام ماتریس بدست می

آید. در این روش معمولاً نقاط نمونه با فواصل مساوی انتخاب می شوند. اما همانطور که گفته

شد با بزرگ شدن  $N$  حل دستگاه مشکل می شود.

نوع دیگری از توابع چند جمله ای نیز می تواند به عنوان تابع تست انتخاب شود. در زیر با قرار

دادن آنها در رابطه (۱-۳)، نوع دیگری از ضرایب بدست آمده اند:

$$g(x) = a_{N-1}x^{N-1} + a_{N-2}x^{N-2} + \dots + a_1x + a_0, \quad (13-3)$$

در جایی که:

$N$ : تعداد نقاط نمونه

$a_i$ : ضریب ثابت جمله  $x^i$

با جایگذاری چند جمله ای (۱۳-۳) در رابطه (۱-۳) چنین بدست می آید:

$$\frac{d^r g(x)}{dx^r} \xrightarrow{x=x_i} = g^{(r)}(x_i) = (N-1)(N-1)\dots(N-r)a_{N-1}x^{N-2+r}$$

+ .....

$$+ (r)(r-1)(r-2)\dots(1)a_r x^{r-r=0}$$

+ 0

+ 0

+ ....(r-1) steps

(۱۴-۳)

بنابراین:

$$g^{(r)}(x_i) = \sum_{k=r}^N k(k-1)\dots(k-r+1)a_k x_i^{k-r}. \quad (۱۵-۳)$$

از طرف دیگر جایگذاری  $g(x)$  از رابطه (۱۵-۳) در سمت راست رابطه بالا نتیجه خواهد داد:

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(r)} g(x_j) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(r)} (a_{N-1}x_j^{N-1} + a_{N-2}x_j^{N-2} + \dots + a_1x_j + a_0) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{N-1} C_{ij}^{(r)} x_j^k a_k, \quad (۱۶-۳)$$

و با ساده سازی چنین می شود:

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(r)} g(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} (C_{i1}^{(r)} x_1^k + C_{i2}^{(r)} x_2^k + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^k) a_k. \quad (۱۷-۳)$$

از مساوی قرار دادن روابط (۱۵-۳) و (۱۷-۳) که به ترتیب سمت چپ و راست رابطه (۱۴-۳)

هستند، رابطه زیر بدست می آید:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (C_{i1}^{(r)} x_1^k + C_{i2}^{(r)} x_2^k + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^k) a_k = \sum_{k=r}^N k(k-1)\dots(k-r+1)a_k x_i^{k-r}. \quad (۱۸-۳)$$

از رابطه اخیر  $N$  معادله و  $N$  مجهول مربوط به سطر  $i$ ام ماتریس ضرایب وزنی چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 C_{i1}^{(r)} + C_{i2}^{(r)} + \dots + C_{iN}^{(r)} &= 0, \\
 C_{i1}^{(r)} x_1 + C_{i2}^{(r)} x_2 + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N &= 0, \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 C_{i1}^{(r)} x_1^{r-1} + C_{i2}^{(r)} x_2^{r-1} + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^{r-1} &= 0, \\
 C_{i1}^{(r)} x_1^r + C_{i2}^{(r)} x_2^r + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^r &= r(r-1)\dots(1)x_i^{r-r=0} = r!, \\
 C_{i1}^{(r)} x_1^{r+1} + C_{i2}^{(r)} x_2^{r+1} + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^{r+1} &= r(r+1)\dots(2)x_i^1, \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 \cdot &\cdot \cdot \\
 C_{i1}^{(r)} x_1^{N-1} + C_{i2}^{(r)} x_2^{N-1} + \dots + C_{iN}^{(r)} x_N^{N-1} &= (N-1)(N+1)\dots(N-r)x_i^{N-1-r}.
 \end{aligned} \tag{۱۹-۳}$$

با تغییر  $i$  از یک تا  $N$ ، سطر اول تا  $N$ ام ماتریس ضرایب وزنی بدست می آید.

۳-۲-۲-۱-۲-روش دوم

بلمن با استفاده از چند جمله ای متعامد انتقال یافته لاگرانژ، تابع تست دیگری طبق رابطه زیر

معرفی کرد:

$$g(x) = \frac{L(x)}{(x-x_i)L_1(x_i)} \quad i=1,2,\dots,N \tag{۲۰-۳}$$

بطوریکه:

$N$ : تعداد نقاط نمونه

$L(x)$ : تابع چند جمله ای متعامد لاگرانژ از مرتبه  $N$

$$L(x) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad i \neq j \quad (21-3)$$

$L_i(x)$ : مشتق تابع چند جمله ای متعامد انتقال یافته لاگرانژ از مرتبه  $N$

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^N (x_i - x_j) \quad (22-3)$$

با انتخاب ریشه های چند جمله ای انتقال یافته لاگرانژ به عنوان نقاط نمونه و جایگذاری  $g(x)$  در

رابطه (۳-۱)، روابط جبری ساده ای برای محاسبه ضرایب وزنی بدست می آیند:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{L_1(x_i)}{(x_i - x_j)L_1(x_j)} \quad for \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (23-3)$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)} \quad for \quad i = j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (24-3)$$

بنابراین، ضرائب وزنی برای حالت دو بعدی به شکل زیر تعمیم می یابد:

الف) برای مشتق مرتبه اول:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} & for \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_x} A_{ij}^{(1)} & for \quad i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x \end{cases} \quad (25-3)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{P(\theta_i)}{(\theta_i - \theta_j)P(\theta_j)} & for \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\theta \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_\theta} B_{ij}^{(1)} & for \quad i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\theta \end{cases} \quad (26-3)$$

که در روابط فوق:

$$M(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} (x_i - x_j) \quad (27-3)$$

$$P(\theta_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_\theta} (\theta_i - \theta_j) \quad (28-3)$$

ب) برای مشتق بالاتر:

$$A_{ij}^{(n)} = n \left( A_{ii}^{(n-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad i \neq j \quad (29-3)$$

$$B_{ij}^{(m)} = m \left( B_{ii}^{(m-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(m-1)}}{(\theta_i - \theta_j)} \right) \quad i \neq j \quad (30-3)$$

البته برای بدست آوردن ضرائب وزنی مشتقات بالاتر می توان  $n$  مرتبه ماتریس ضریب وزنی مرتبه اول را در خودش ضرب نمود یعنی:

$$[A^{(n)}] = [A^{(1)}]^n \quad (31-3)$$

$$[B^{(m)}] = [B^{(1)}]^m \quad (32-3)$$

برای اثبات رابطه فوق، مراحل بدست آوردن ضریب وزنی مشتق دوم برای مشتق در راستای  $x$  شرح داده می شود. برای اینکار کافی است از آن تابع دو بار مشتق گرفته یا از مشتق اول آن یک بار دیگر مشتق گرفت:

$$\begin{aligned}
\{f''\} &= [A^{(1)}]\{f'\} \Rightarrow \\
\{f''\} &= [A^{(1)}][A^{(1)}]\{f\} \Rightarrow \\
\{f''\} &= [A^{(1)}]^2\{f\} = [A^{(2)}]\{f\} \Rightarrow \\
[A^{(2)}] &= [A^{(1)}]^2.
\end{aligned}
\tag{۳-۳۳}$$

و به همین ترتیب می توان با  $n$  بار ضرب کردن ماتریس  $[A^{(1)}]$  در خودش، ماتریس ضرایب وزنی

که مشتق  $n$  ام می گیرد را ساخت:

$$[A^{(n)}] = [A^{(1)}][A^{(n-1)}] = [A^{(n-1)}][A^{(1)}]
\tag{۳-۳۴}$$

### ۳-۳- شرط مرزی و نحوه اعمال آن

روش تفاضلات مربعی بطور موفقیت آمیزی برای مسائل فیزیکی و مهندسی با شرایط مرزی مختلف استفاده شده است و نتایج نشان از دقت بسیار بالای این روش ها می باشد. زمانی که بیش از یک شرط مرزی در نقاط مرزی اعمال شود، اعمال شرایط مرزی بسیار سخت می باشد. این موقعیت در بسیاری از ساختار های مکانیکی مشترک می باشد. دو تکنیک برای اعمال شرایط مرزی در این روش ها وجود دارد که در زیر به آن پرداخته می شود:

#### ۳-۳-۱- تکنیک دلتا

روش دلتا توسط برت [۴۲] برای اعمال دو شرط مرزی در هر نقطه مرزی بکار گرفته شد. در این روش مجموعه ای از دو نقطه ای هایی که با فاصله  $\delta$  از یکدیگر قرار گرفته اند، در نزدیکی لبه

های مرزی قرار داده می شوند. یکی از شرط های مرزی بر نقاط شبکه موجود در لبه های مرزی اعمال می شود؛ در حالی که دیگر شرایط مرزی روی نقاط شبکه مجاور کمکی  $\delta$  اعمال می شوند. همانطور که مشخص است، در این روش فقط یک شرط مرزی به طور دقیق و سایر شرایط بطور تقریبی اعمال می شوند.

### ۳-۳-۲- تکنیک اصلاح ضرائب وزنی

این روش توسط فانگ برای شرط مرزی ساده به کار گرفته شد. با فرض یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه  $m$  این روش توضیح داده می شود:

$$\alpha_0 \frac{d^m y}{dx^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + \alpha_m y = f(x) \quad \text{for } 0 < x < L \text{ and } \alpha_0 \neq 0. \quad (3-35)$$

با استفاده از روش تفاضلات مربعی، معادله فوق در  $n$  نقطه شبکه  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$(\alpha_0 [A^{(m)}] + \alpha_1 [A^{(m-1)}] + \dots + \alpha_m [A^{(0)}]) \{Y\} = \{f\}. \quad (3-36)$$

جایی که:

$$[A^{(0)}] = I, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{Bmatrix} \quad (3-37)$$



همچنین  $y_1, y_2, \dots, y_n$  به ترتیب مقادیر  $y(x)$  در نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n$  هستند. معادله (۳-۳۶) با اعمال شرایط مرزی حل می شود. برای یک معادله از مرتبه  $m$  باید  $m$  شرط مرزی وجود داشته باشد. پروسه حل می تواند با روش های زیر انجام شود:

- انتخاب  $n-m$  معادله از رابطه (۳-۳۶)، ایجاد کردن  $m$  معادله دیفرانسیل شرط مرزی یکسان در نقاط مرزی و بدست آوردن  $n$  ثابت  $y_1, y_2, \dots, y_n$  با حل ترکیب  $n$  معادله.
- انتخاب  $n-m$  معادله از رابطه (۳-۳۶)، ایجاد کردن  $m$  معادله دیفرانسیل شرط مرزی یکسان در مرز و نقاط مجاور و بدست آوردن  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . این همان روش  $\delta$  است که شرایط مرزی بطور تقریبی اعمال می شود.
- اصلاح ماتریس ضرائب وزنی برای ترکیب کردن شرایط مرزی. در این روش، شرایط مرزی بطور دقیق اعمال می گردد.

### ۳-۳-۳- نمونه ای از اصلاح ماتریس ضرائب وزنی

برای تشریح این روش، از یک مثال استفاده می شود. برای این منظور یک تیر با تکیه گاه ساده در دو طرف فرض می شود. شرط مرزی این تیر به صورت

$$y(x_1) = 0, y''(x_1) = 0, y(x_N) = 0, y''(x_N) = 0$$

می باشد. برای اعمال شرایط مرزی در ماتریس ضرائب وزنی، تمام درایه های موجود در ستون های مربوط به  $x_1$  تا  $x_N$  برابر صفر قرار داده می شود. بنابراین:

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}^{(1)} & \cdot & \cdot & A_{1,n-1}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & A_{2,n-1}^{(1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_{n2}^{(1)} & \cdot & \cdot & A_{n,n-1}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

همچنین فانگ روش دیگری را نیز پیشنهاد کرد که دارای عمومیت بیشتری می باشد و می تواند برای شرایط مرزی غیر همگن و پیچیده به کار رود. به عنوان مثال،  $m$  شرط مرزی غیرهمگن برای معادله دیفرانسیل (3-36) عبارت است از:

$$\gamma_{i1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \Big|_{x=\bar{x}_i} + \gamma_{i2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \Big|_{x=\bar{x}_i} + \dots + \gamma_{i0} y(x_i) = \beta_i \quad \text{for } i=1,2,\dots,m.. \quad (3-39)$$

جایی که  $\beta_i$  و  $\gamma_{ii}$  ضرائب ثابت و  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  نقاط مرزی هم مرتبه می باشند. طور کلی، برای مسئله مقدار مرزی،  $\bar{x}_i$  به صورت بدون بعد بین صفر و یک هستند. در این روش با ترکیب معادله حاکمه و شرط مرزی، مسئله حل می شود.

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{y_b\} \\ \{y_d\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\beta\} \\ \{f\} \end{bmatrix}. \quad (3-40)$$

با استفاده از سطر اول معادله فوق خواهیم داشت:

$$\{y_b\} = [k_{11}^{-1}] (\{\beta\} - [k_{12}]\{y_d\}). \quad (3-41)$$

با جایگذاری معادله (3-41) در معادله (3-40)، معادله حاکم بر میدان با اعمال شرط مرزی بدست می آید:

$$([k_{22}] - [k_{21}][k_{11}^{-1}][k_{12}])\{y_d\} = (\{f\} - [k_{21}][k_{11}^{-1}]\{\beta\}). \quad (3-42)$$

این روش تقریباً برای هر نوع مسئله ای قابل استفاده بوده و دارای دقت خوبی می باشد. در این پروژه با توجه به اینکه شرط مرزی از نوع گیر دار بوده و با معادلات حاکمه کوپل است، از این روش استفاده شده است.

### ۳-۴- پروسه حل معادلات حاکمه بر اساس روش تفاضلات مربعی:

با توجه به مطالب فوق برای حل معادلات حاکمه که در فصل قبل محاسبه شدند، لوله در راستای طول بر اساس فاصله گذار چبیشف شبکه بندی شده و ضرائب وزنی برای تمامی مشتقات با استفاده از روابط (۳-۲۵) تا (۳-۳۰) محاسبه می گردد. سپس مشتقات با ماتریس های ضرائب وزنی مربوط به خود جایگزین می شوند. حال با استفاده از مودهای زمانی زیر، ترم هایی که دارای مشتق زمانی هستند، حذف می شوند و معادلات دیفرانسیل کاملاً بر حسب مشتقات مکانی خواهند بود.

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, t) &= \bar{u}(x, y)e^{\lambda t}, \\ \bar{v}(x, y, t) &= \bar{v}(x, y)e^{\lambda t}, \\ \bar{w}(x, y, t) &= \bar{w}(x, y)e^{\lambda t},\end{aligned}\tag{۳-۴۳}$$

در معادله بالا  $\lambda$  معرف فرکانس و همچنین  $\bar{u}(x, y)$ ،  $\bar{v}(x, y)$  و  $\bar{w}(x, y)$  بیانگر دامنه های ارتعاشات در سه راستای طولی، محیطی و عرضی می باشند. همانطور که از رابطه (۲-۶۶) واضح است، معادله شرط مرزی به سبب داشتن ضرائب وزنی، با معادلات حاکمه کوپل می شود. در

نتیجه باید نقاط مربوط به شرط مرزی و میدان از یکدیگر جدا شوند. بنابراین معادلات حاکمه و شرط مرزی در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left( \left[ \underbrace{K_L + K_{NL}}_K \right] + \Omega [C] + \Omega^2 [M] \right) \begin{Bmatrix} \{d_b\} \\ \{d_d\} \end{Bmatrix} = 0, \quad (44-3)$$

در روابط بالا،  $\Omega = \frac{\lambda}{h_s} \sqrt{C_{s11} / \rho_s}$  معرف فرکانس بدون بعد می باشد. همچنین  $[K_L]$ ،  $[K_{NL}]$  و

$[M]$  بترتیب بیانگر قسمت خطی ماتریس سختی، قسمت غیر خطی ماتریس سختی و ماتریس جرم می باشند. همچنین  $\{d_b\}$  و  $\{d_d\}$  به ترتیب بردار دامنه دینامیکی مربوط به نقاط شرط مرزی و میدان می باشند. معادله فوق فرم کلی یک مسئله مقدار ویژه را دارد و روند حل آن بصورت زیر می باشد:

- از ترم های غیر خطی در ماتریس سختی صرف نظر شده و بردار ویژه ( بردار جابجایی  $\{d\}$  ) و مقدار ویژه  $(\Omega)$  در حالت خطی محاسبه می شود.
- بردار جابجایی مرحله قبل در ترم های غیر خطی ماتریس سختی جایگذاری می شود و دوباره بردار ویژه و مقدار ویژه مربوط به حالت غیر خطی محاسبه می شود.
- این فرایند تا جایی ادامه پیدا می کند تا نسبت همگرایی زیر ارضا شود [43].

$$\frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{\alpha_{i-1}} < 0.01 \quad (45-3)$$

## فصل چهارم: مقایسه و بررسی نتایج

### ۴-۱- تحلیل نتایج

در این فصل به بررسی نتایج عددی ارتعاشات غیر خطی لوله نانوکامپوزیتی از جنس پلی اتیلن حاوی جریان سیال ویسکوز پرداخته شده است. در این تحقیق از شرط مرزی گیردار در دو انتهای لوله استفاده شده و لوله در محیط الاستیک واقع شده است. با توجه به غیر خطی بودن مسئله، از روش عددی تفاضلات مربعی استفاده شده و برای این منظور نرم افزارهای متلب<sup>۱</sup> و میپل<sup>۲</sup> به کار برده شده است. همچنین لوله با دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو مدل شده است.

هدف از انجام این تحقیق، بررسی اثرات سرعت سیال، درصد حجمی نانولوله کربنی، پارامترهای هندسی لوله، محیط الاستیک و ویسکوزیته روی فرکانس ارتعاشات و سرعت بحرانی سیال می باشد. همچنین کلیه نمودارها برای پلی اتیلن با مدول الاستیک  $E_m = 125 \text{ GPa}$ ، ضریب پواسون  $\nu_m = 0.3$  و دانسیته  $\rho = 1450 \text{ Kg/m}^3$  رسم شده است. همچنین سیال، آب با دانسیته  $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است [۴۴].

---

۱. Matlab

۲. Maple

## ۲-۴- مدل تیر اویلر-برنولی

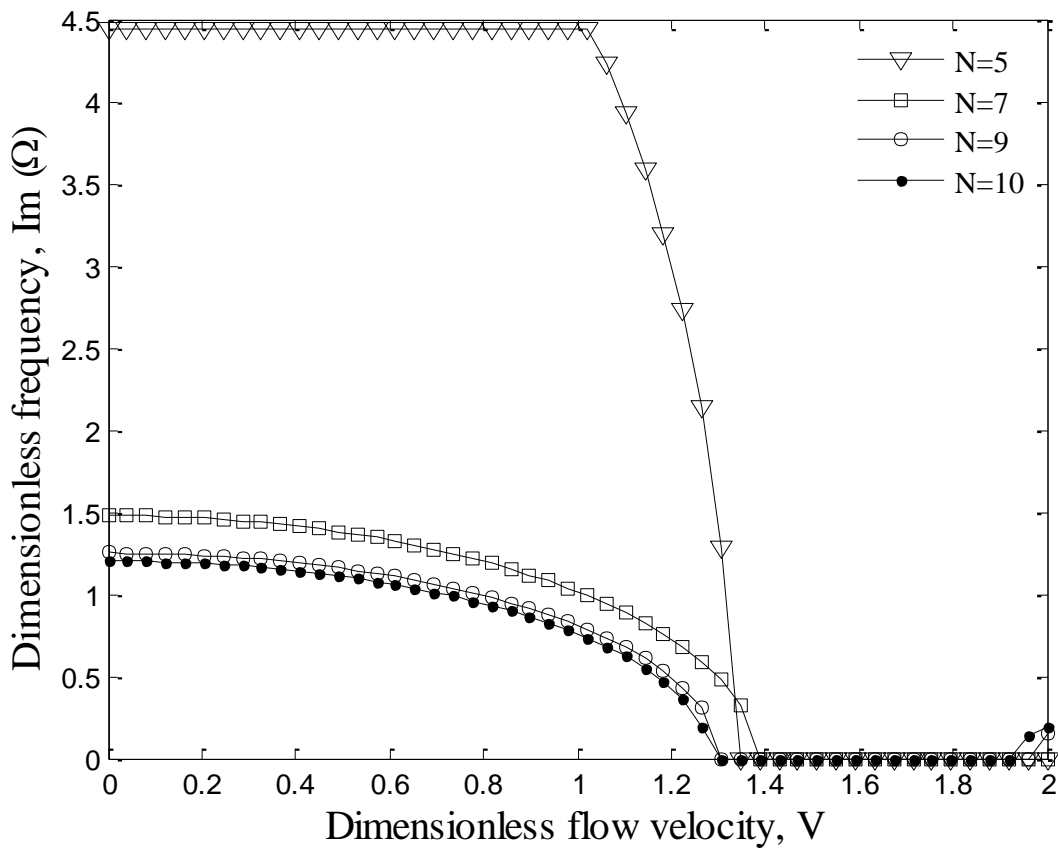
### ۱-۲-۴- بررسی همگرایی روش تفاضلات مربعی

شکل های (۱-۴) و (۲-۴) بترتیب همگرایی روش تفاضلات مربعی را روی فرکانس طبیعی ( $\text{Im}(\Omega)$ ) بر حسب سرعت سیال و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بر حسب ماکزیمم خیز تیر را در حالت بدون بعد نمایش می دهند. همانطور که مشخص است، در نظر گرفتن تعداد ۱۰ نقطه روی تیر اویلر-برنولی منجر به همگرا شدن جواب های بدست آمده، خواهد شد. همچنین، در شکل (۱-۴) با افزایش سرعت سیال، فرکانس کاهش می یابد تا به صفر برسد. نقطه ای که فرکانس در آن صفر است را نقطه ناپایداری سیستم می نامند و سرعت مربوطه را سرعت بحرانی سیستم می گویند. همانطور که مشاهده می شود در نقطه همگرایی، سرعت سیال در  $1/3$  به مقدار بحرانی می رسد که اصطلاحاً ناپایداری واگرایی رخ می دهد.

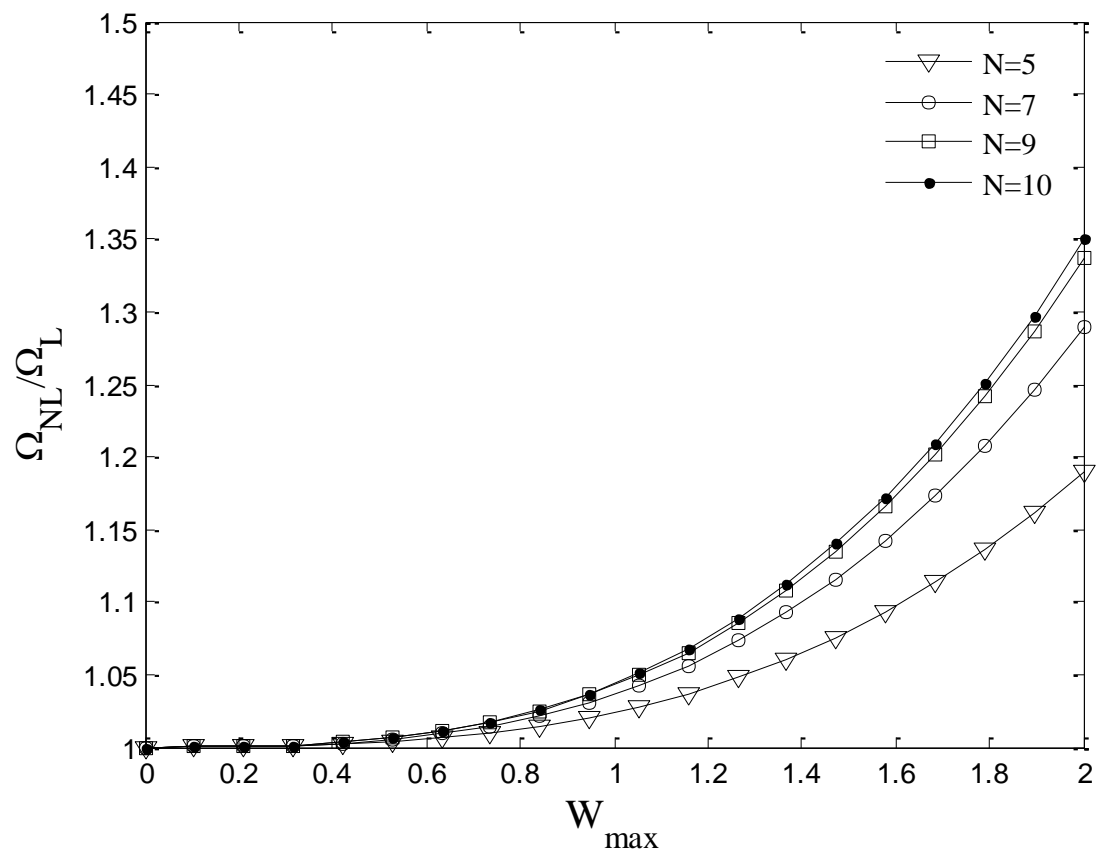
### ۲-۲-۴- بررسی تا ثیرات پارامتر هندسی لوله

اثر نسبت طول به شعاع لوله روی فرکانس و نسبت فرکانس به ترتیب در شکل های (۳-۴) و (۴-۴) نشان داده شده است. واضح است که کاهش  $L/R$  فرکانس سازه را افزایش داده ولی نسبت فرکانس را کاهش می دهد که این بدلیل افزایش سفتی و استحکام لوله می باشد. همانطور که مشخص است، در  $L/R=18$  سرعت بحرانی  $1/15$  است در حالی که در  $L/R=8$  سرعت

بحرانی  $1/84$  می باشد. بنابراین با کاهش  $L/R$  محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه کاهش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد.

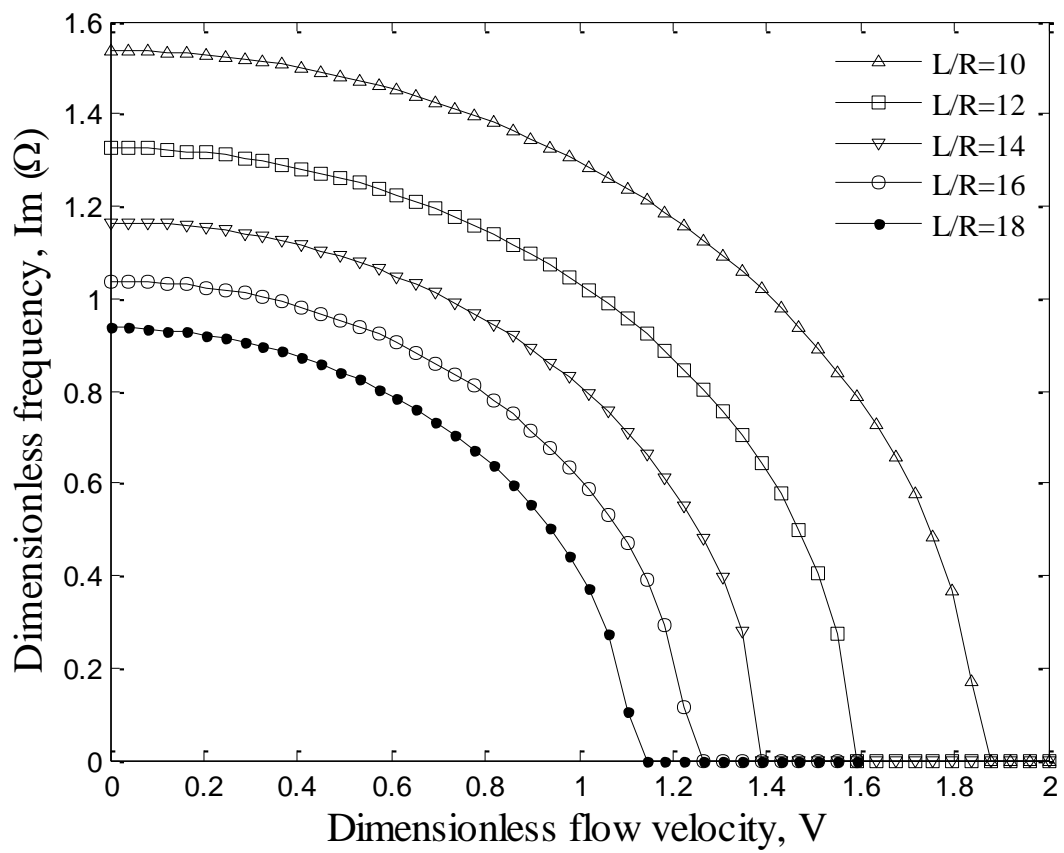


شکل ۴-۱- همگرایی روش DQM روی فرکانس بر حسب سرعت سیال

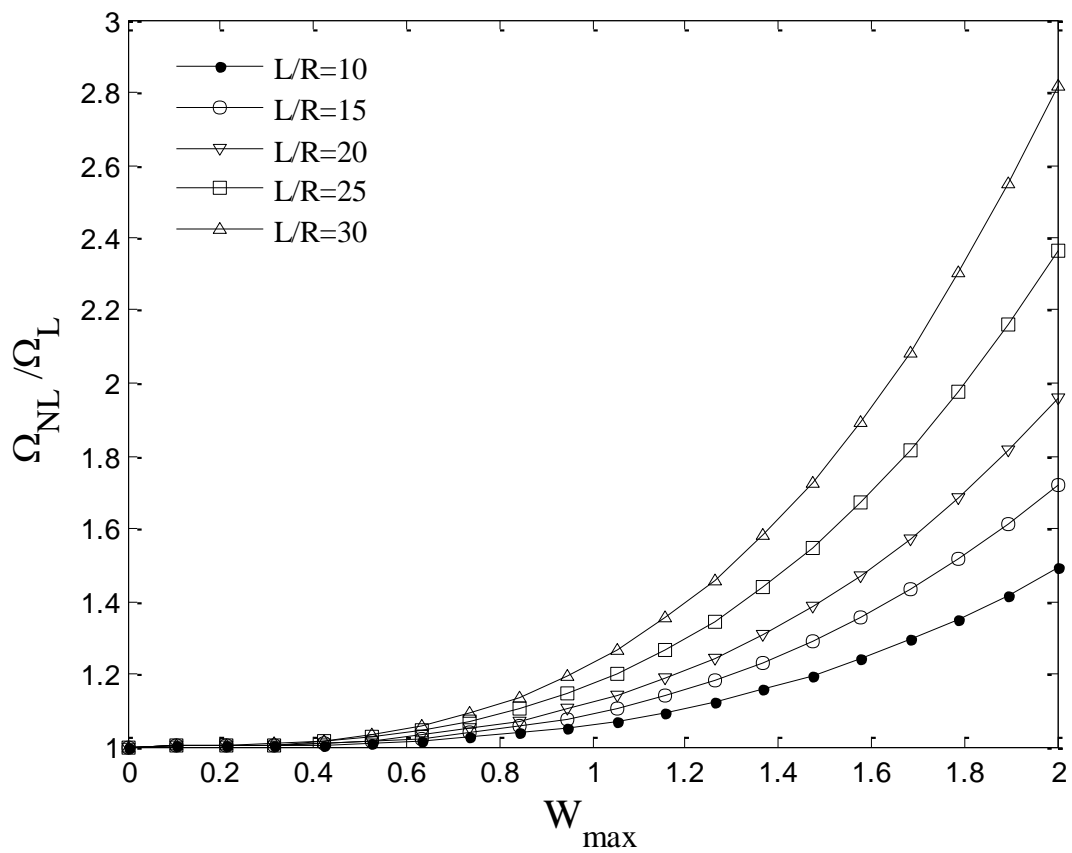


شکل ۴-۲- همگرایی روش DQM روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر





شکل ۴-۳- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال



شکل ۴-۴- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر

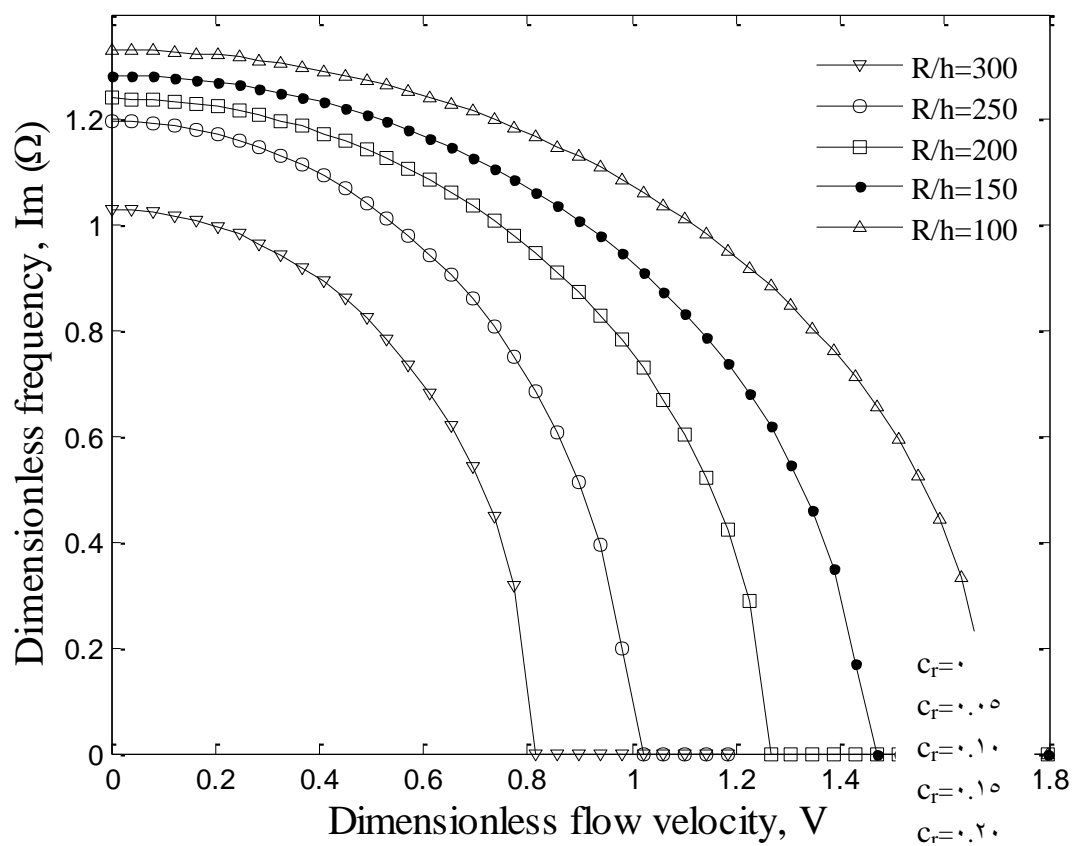
#### ۴-۲-۳- بررسی تا ثیرات درصد حجمی نانولوله کربنی

فرکانس ارتعاشات بر حسب سرعت سیال برای درصدهای حجمی مختلف نانولوله کربنی در شکل (۴-۵) و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بر حسب ماکزیمم خیز تیر برای درصدهای حجمی مختلف نانولوله کربنی در شکل (۴-۶) با فرض سرعت پایدار، رسم شده است. نتایج نشان می دهد که هرچه درصد حجمی نانولوله کربنی بیشتر شود فرکانس بدلیل افزایش سفتی لوله بیشتر شده ولی نسبت فرکانس کاهش می یابد. همانطور که مشخص است، در  $c_r = 0$ ، سرعت بحرانی  $0.82$  است در حالی که در  $c_r = 0.2$  سرعت بحرانی  $1.72$  می باشد. بنابراین با افزایش درصد حجمی نانولوله کربنی، محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه افزایش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد. این نمودار اثر تکنولوژی نانو را روی بهبود رفتار ارتعاشی و ناپایداری لوله ها را به خوبی نمایش می دهد و می توان به طور کلی نتیجه گرفت که استفاده از نانولوله های کربنی به عنوان فاز تقویت در لوله ها، باعث افزایش سفتی سیستم شده و سرعت سیال بحرانی دیرتر رخ خواهد داد.

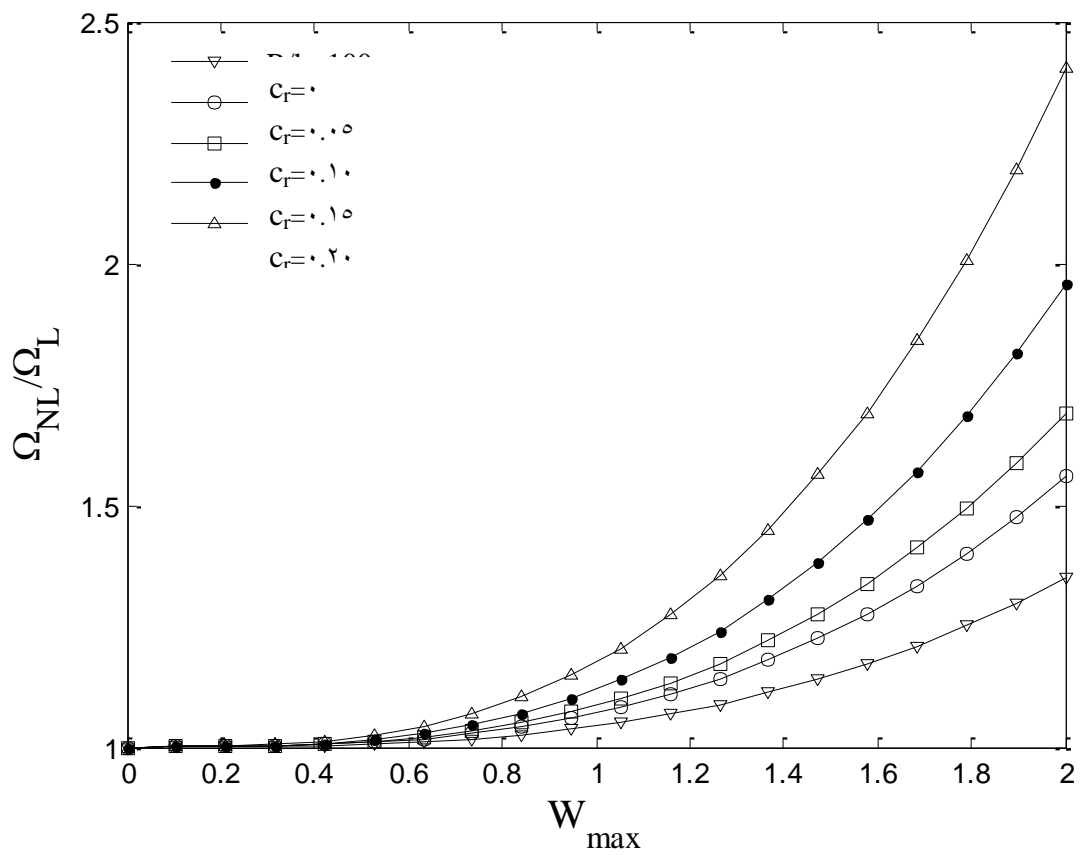
#### ۴-۲-۴- بررسی تاثيرات ضريب پواسون

شکل (۷-۴) بيانگر تاثيرات ضريب پواسون روی فرکانس طبیعی لوله گاز بر حسب سرعت سیال

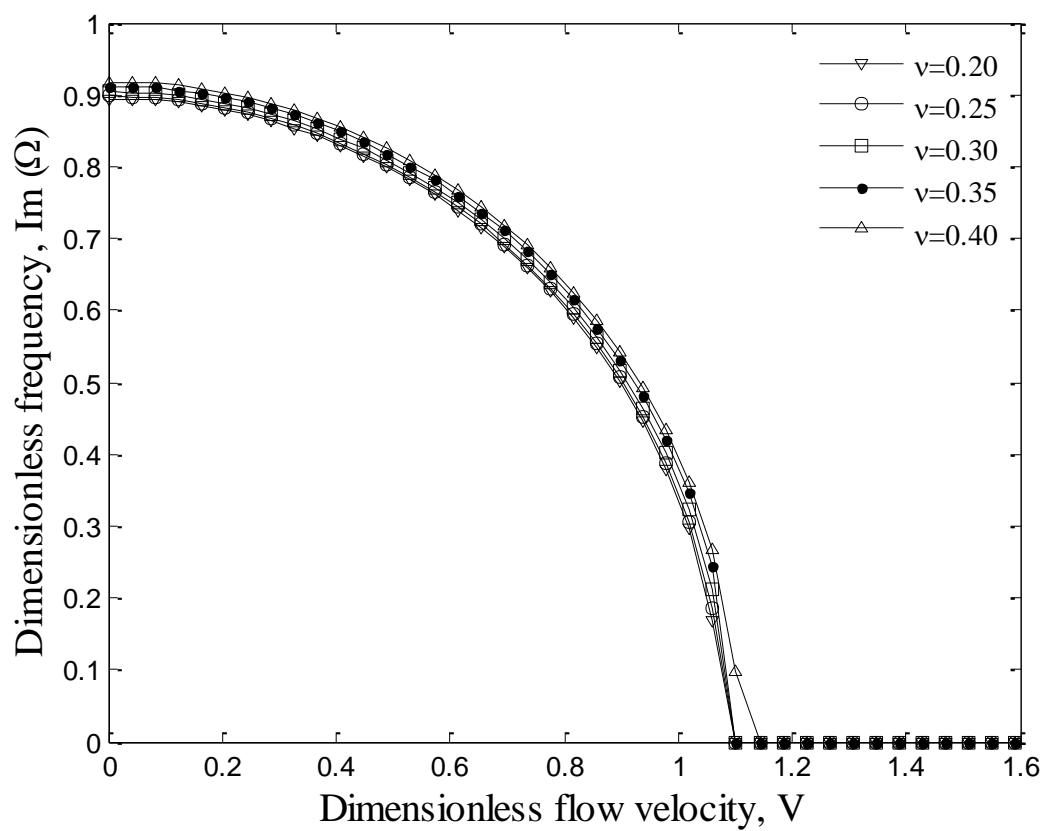
می باشد. مشاهده می شود که با افزایش ضريب پواسون، فرکانس سیستم بیشتر می شود که این به



شکل ۴-۵- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی فرکانس بر حسب سرعت سیال



شکل ۴-۶- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر



شکل ۴-۷- اثر ضریب پواسون روی فرکانس بر حسب سرعت سیال

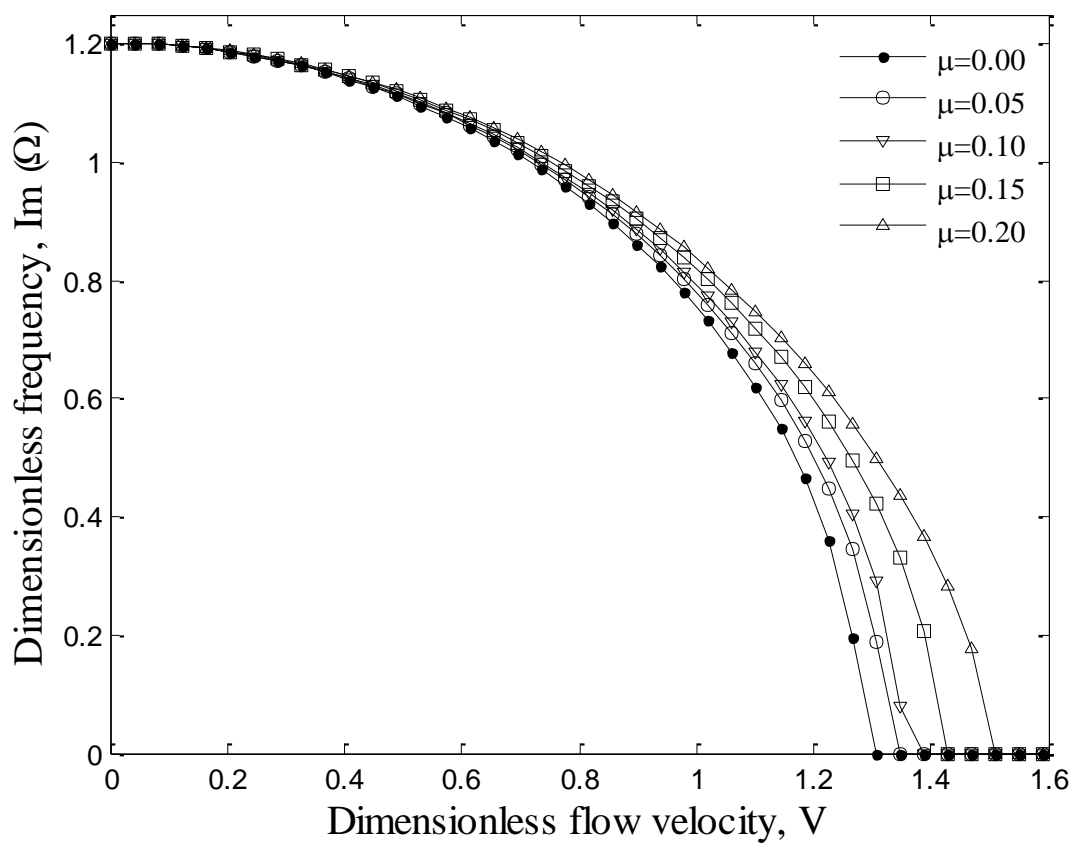
#### ۴-۲-۵- بررسی تا ثیرات ویسکوزیته سیال عبوری

اثرات ویسکوزیته سیال ( $\mu$ ) روی فرکانس سازه ( $\text{Im}(\Omega)$ ) در برابر سرعت سیال در شکل (۴-۸) نمایش داده شده است. در سرعت صفر، ویسکوزیته روی فرکانس اثری ندارد در حالی که در سرعت های بالا اثرات ویسکوزیته بیشتر می شود چون اثرات ویسکوزیته در سرعت های بالا نمایان می گردد. همچنین مشخص است که با افزایش  $\mu$  فرکانس افزایش می یابد. دلیل این موضوع آنست که با افزایش  $\mu$ ، نیروی برشی سیال بیشتر شده که باعث جابجایی ارتعاشی کوچکی می شود. بعلاوه، هر چه ویسکوزیته سیال بیشتر شود، سرعتی که ناپایداری واگرایی و لرزشی ایجاد می کند، افزایش می یابد.

#### ۴-۲-۶- بررسی تا ثیرات محیط الاستیک

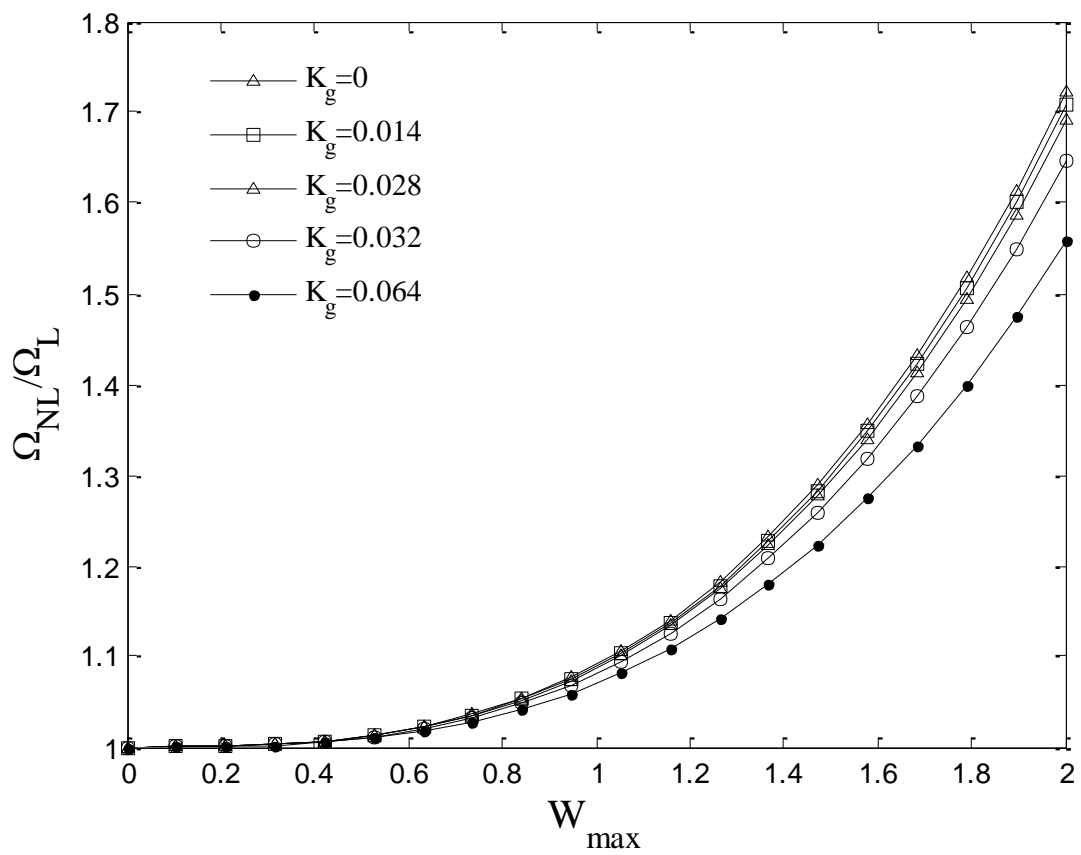
اثر محیط الاستیک به عنوان مدل عمودی وینکلر و مدل برشی پاسترناک شبیه سازی شده است. بطور کلی اثر پاسترناک از وینکلر بیشتر است. بنابراین در این پروژه، اثر ضریب پاسترناک در شکل (۴-۹) روی فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر در حالت بدون بعد نشان داده شده است. مشاهده می شود که هر چه محیط الاستیک قوی تر شود فرکانس بدلیل افزایش سفتی لوله بیشتر و نسبت فرکانس کمتر می شود. هر چند که تاثیرات پاسترناک کمتر از پارامترهایی همچون  $L/R$  می باشد،

ولی در سیستم هایی که محدودیت ضخامت یا بعد داشته باشیم، می تواند پارامتر مفیدی برای دور کردن سیستم از حالت ناپایداری و افزایش فرکانس باشد.



شکل ۴-۸- اثر ویسکوزیته سیال عبوری از لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال





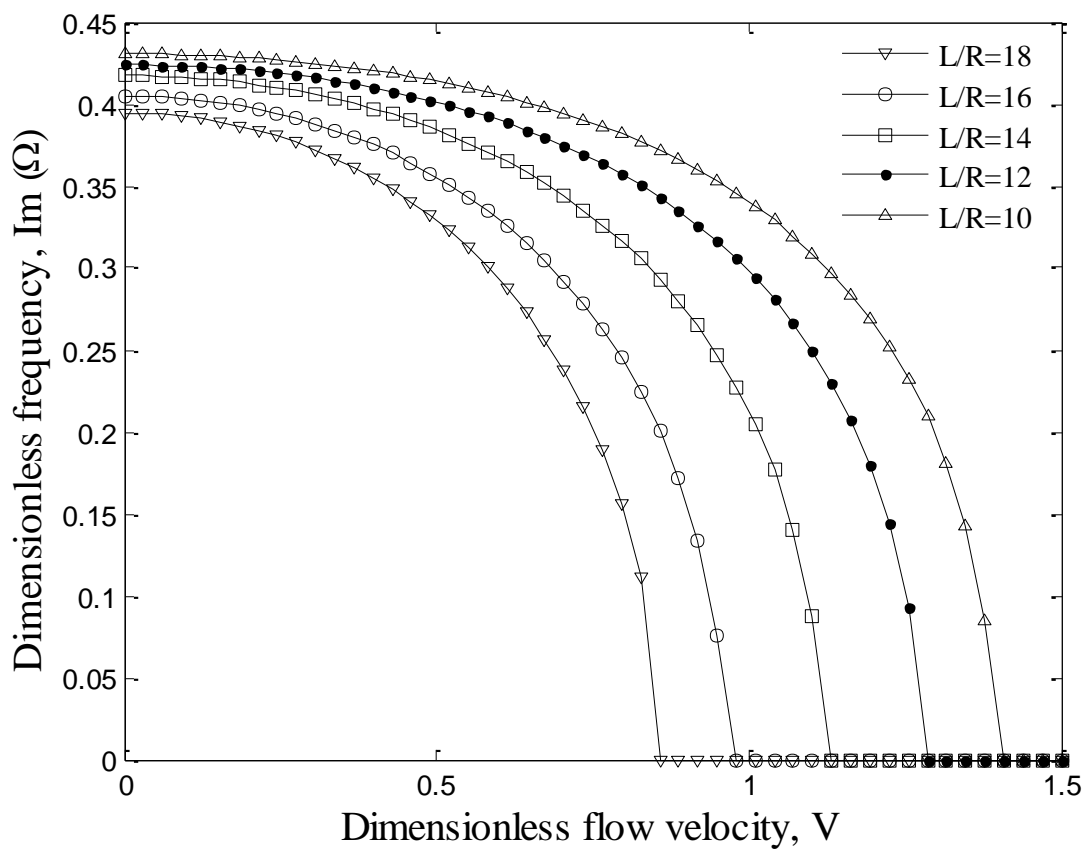
شکل ۴-۹- اثر ضریب پاسترناک روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر

### ۴-۳- مدل تیر تیموشنکو

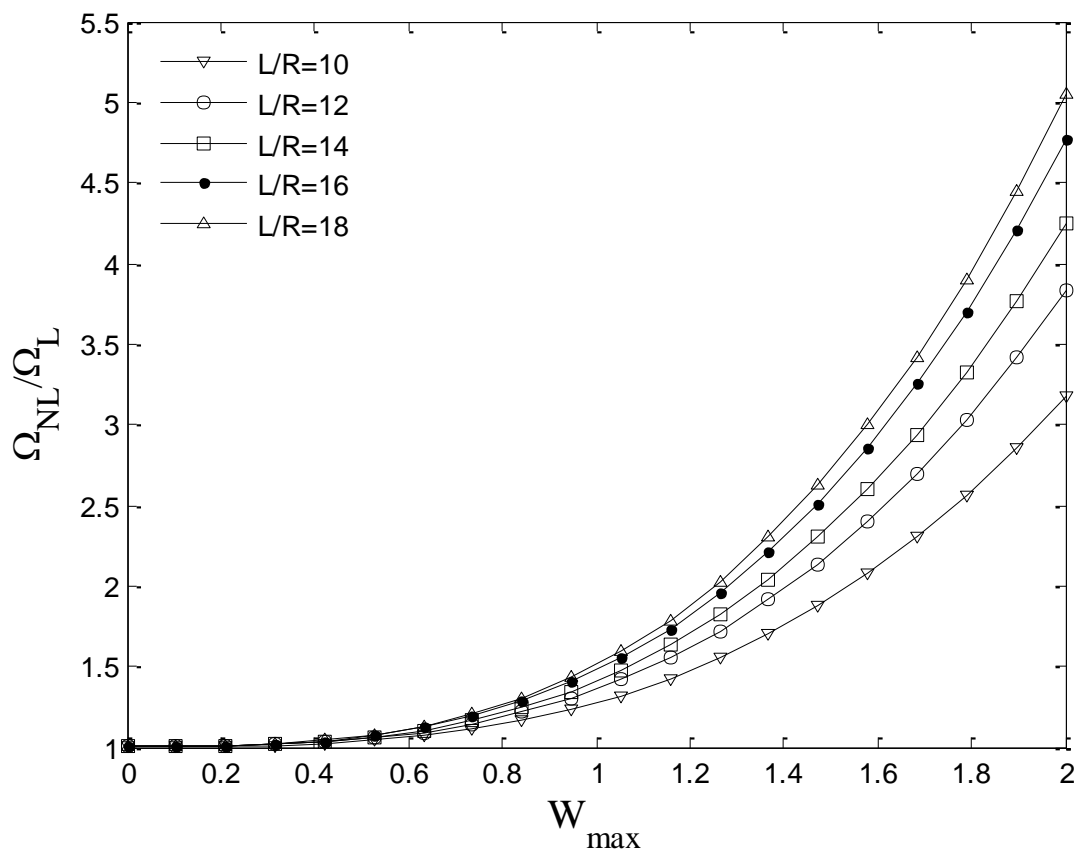
در این قسمت لوله با تیر تیموشنکو مدل شده و تاثیرات پارامترهای مختلف از جمله محیط الاستیک، درصد حجمی نانولوله کربنی، پارامتر هندسی لوله و ... روی فرکانس و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی نشان داده شده است.

### ۴-۳-۱- بررسی تا ثیرات پارامتر هندسی لوله

تغییرات فرکانس بدون بعد در برابر سرعت بدون بعد سیال برای  $L/R$  های مختلف در شکل (۴-۱۰) و تغییرات نسبت فرکانس غیر خطی به خطی در برابر ماکزیمم خیز تیر برای  $L/R$  های مختلف در شکل (۴-۱۱) نشان داده شده است. واضح است که کاهش  $L/R$  فرکانس سازه را افزایش داده ولی نسبت فرکانس را کاهش می دهد که این بدلیل افزایش سفتی و استحکام لوله می باشد. همانطور که مشخص است، در  $L/R=18$  سرعت بحرانی  $0/81$  است در حالی که در  $L/R=10$  سرعت بحرانی  $1/42$  می باشد. بنابراین با کاهش  $L/R$  محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه کاهش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد.



شکل ۴-۱۰- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال



شکل ۴-۱۱- اثر نسبت طول به شعاع لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر

#### ۴-۳-۲- بررسی تا ثیرات درصد حجمی نانولوله کربنی

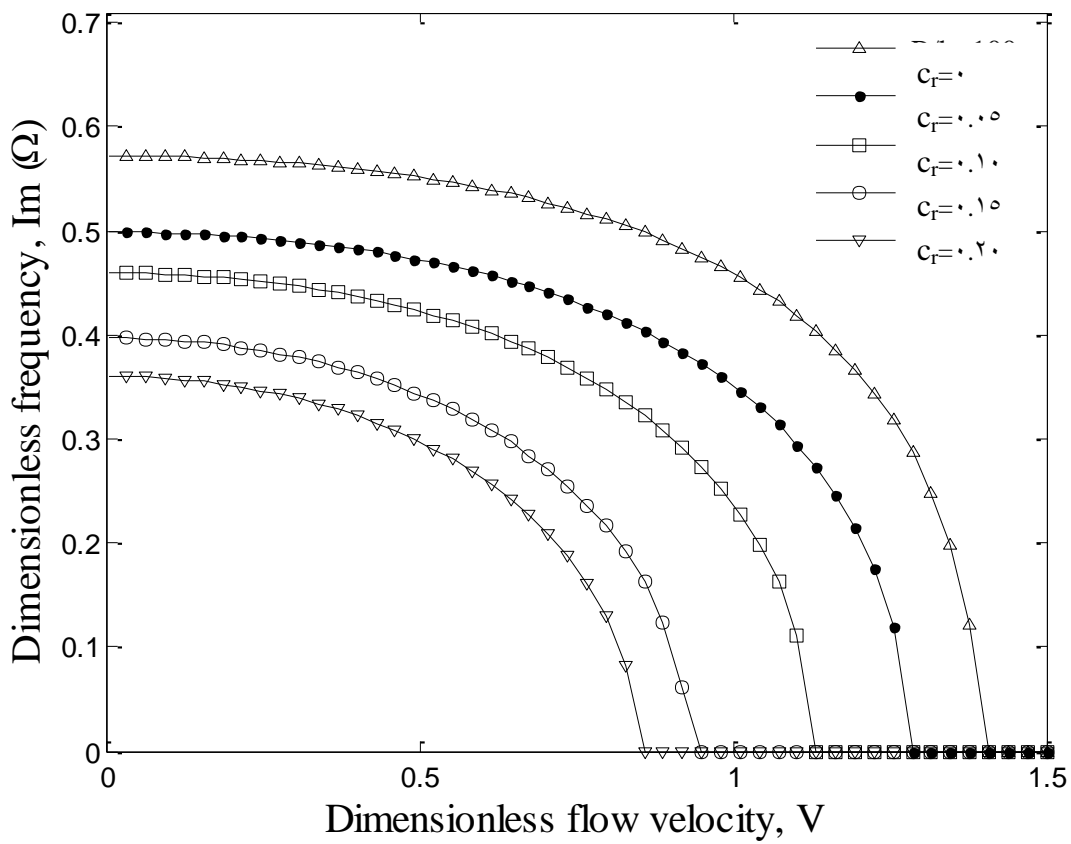
فرکانس ارتعاشات بر حسب سرعت سیال برای درصدهای حجمی مختلف نانولوله کربنی در شکل (۴-۱۲) و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بر حسب ماکزیمم خیز تیر برای درصدهای حجمی مختلف نانولوله کربنی در شکل (۴-۱۳) با فرض سرعت پایدار، رسم شده است. نتایج نشان می دهد که هرچه درصد حجمی نانولوله کربنی بیشتر شود فرکانس بدلیل افزایش سفتی لوله بیشتر شده ولی نسبت فرکانس کاهش می یابد. همانطور که مشخص است، در  $c_r = 0$ ، سرعت بحرانی  $0.86$  است در حالی که در  $c_r = 0.2$  سرعت بحرانی  $1/32$  می باشد. بنابراین با افزایش درصد حجمی نانولوله کربنی، محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه افزایش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد.

#### ۴-۳-۳- بررسی تا ثیرات ضریب پواسون

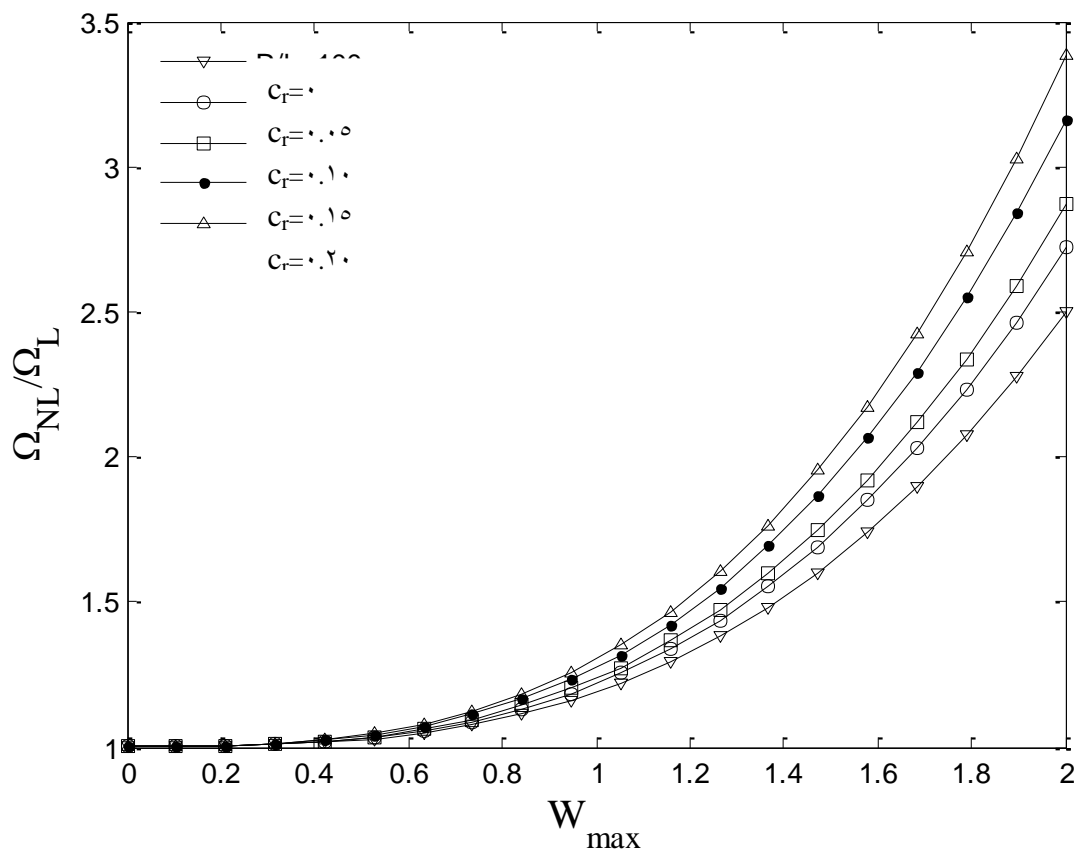
شکل (۴-۱۴) و (۴-۱۵) به ترتیب بیانگر تا ثیرات ضریب پواسون روی فرکانس لوله بر حسب سرعت سیال و نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بر حسب ماکزیمم دامنه لوله می باشد. مشاهده می شود که با افزایش ضریب پواسون، فرکانس سیستم بیشتر و نسبت فرکانس کمتر می شود که

این به دلیل افزایش مقاومت و استحکام لوله می باشد. این ضریب تاثیر کمی روی تغییر فرکانس

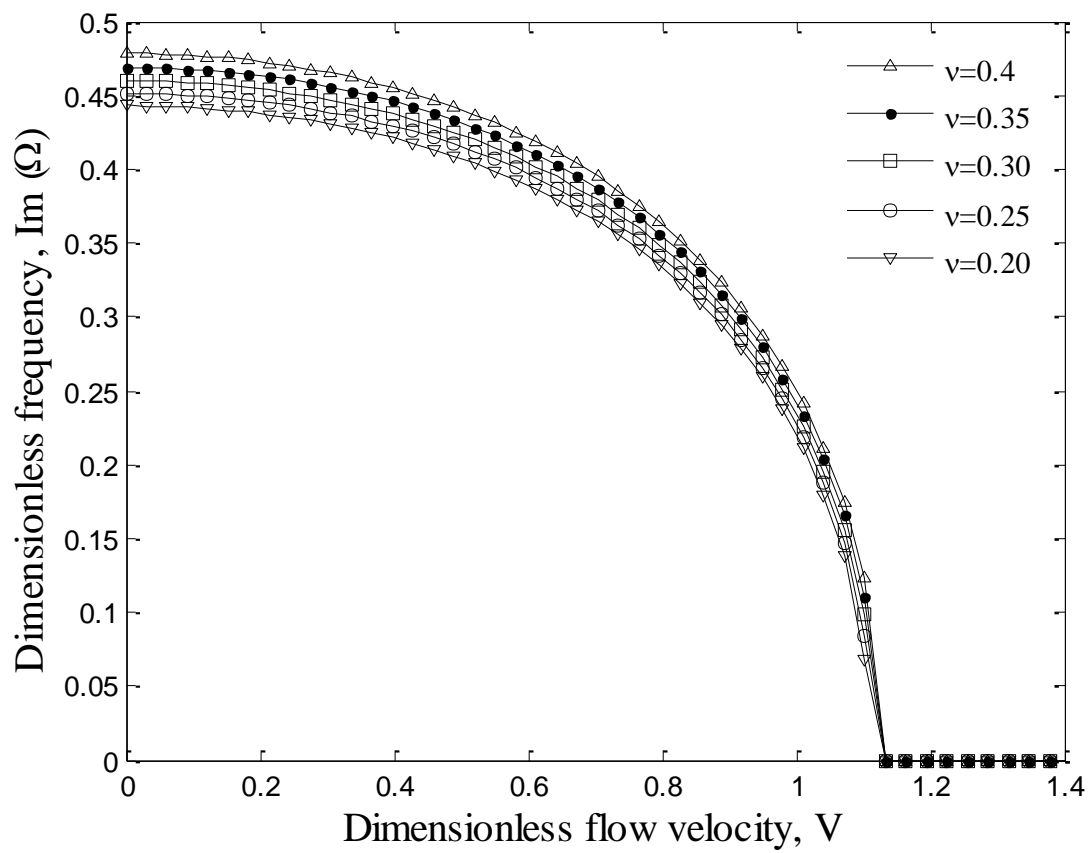
دارد ولی روی ناپایداری و سرعت بحرانی تاثیری ندارد.



شکل ۴-۱۲- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی فرکانس بر حسب سرعت سیال

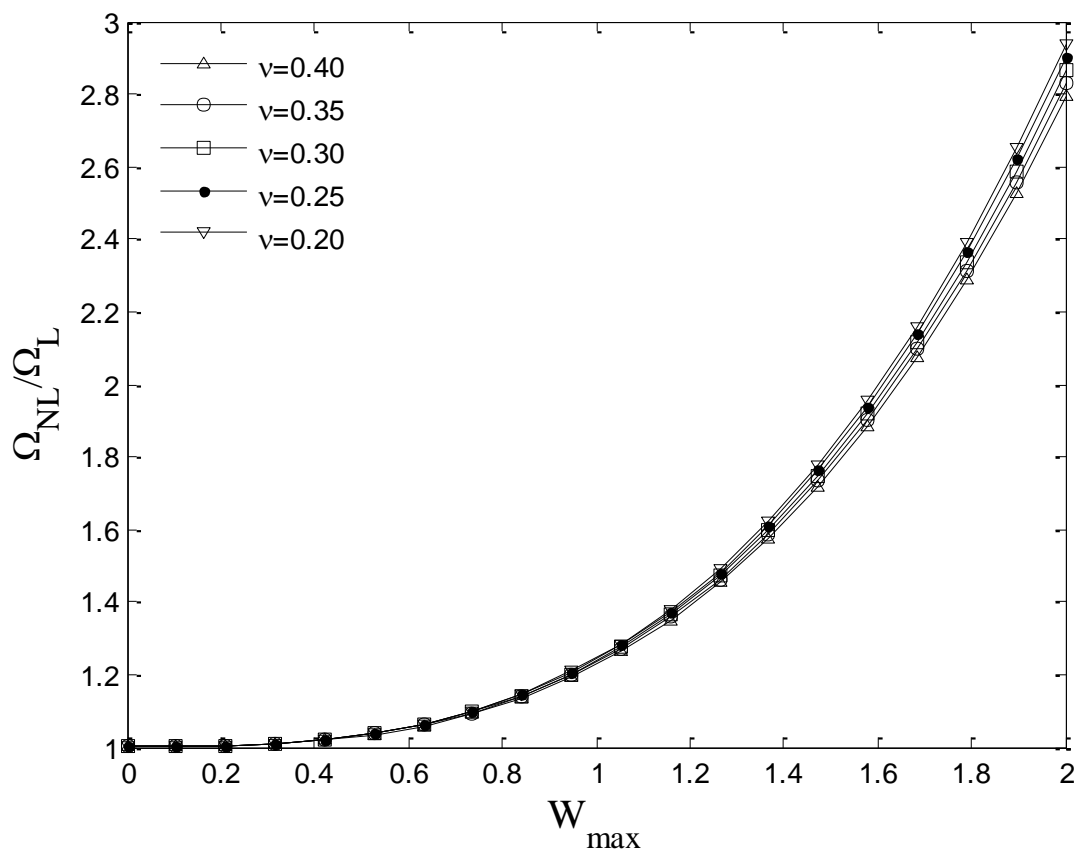


شکل ۴-۱۳- اثر درصد حجمی نانولوله کربنی روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر



شکل ۴-۱۴- اثر ضریب پواسون روی فرکانس بر حسب سرعت سیال





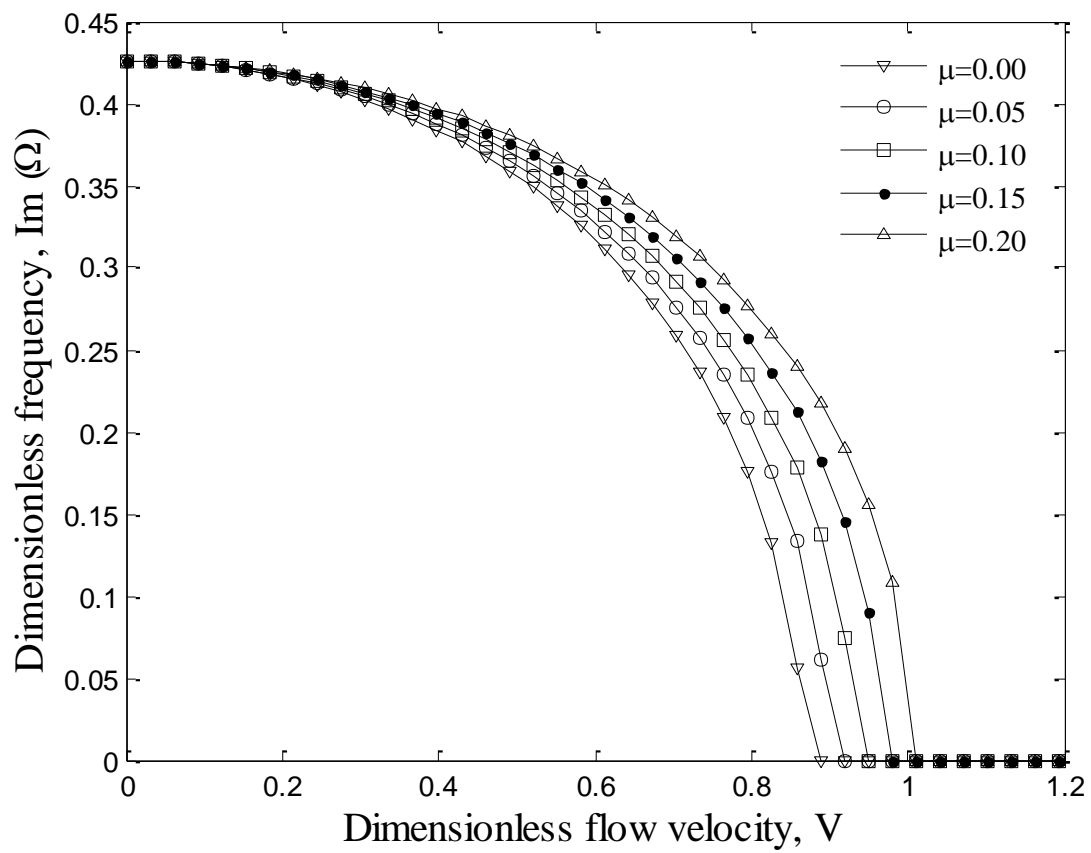
شکل ۴-۱۵- اثر ضریب پواسون روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر

#### ۴-۳-۴- بررسی تا ثیرات ویسکوزیته سیال عبوری

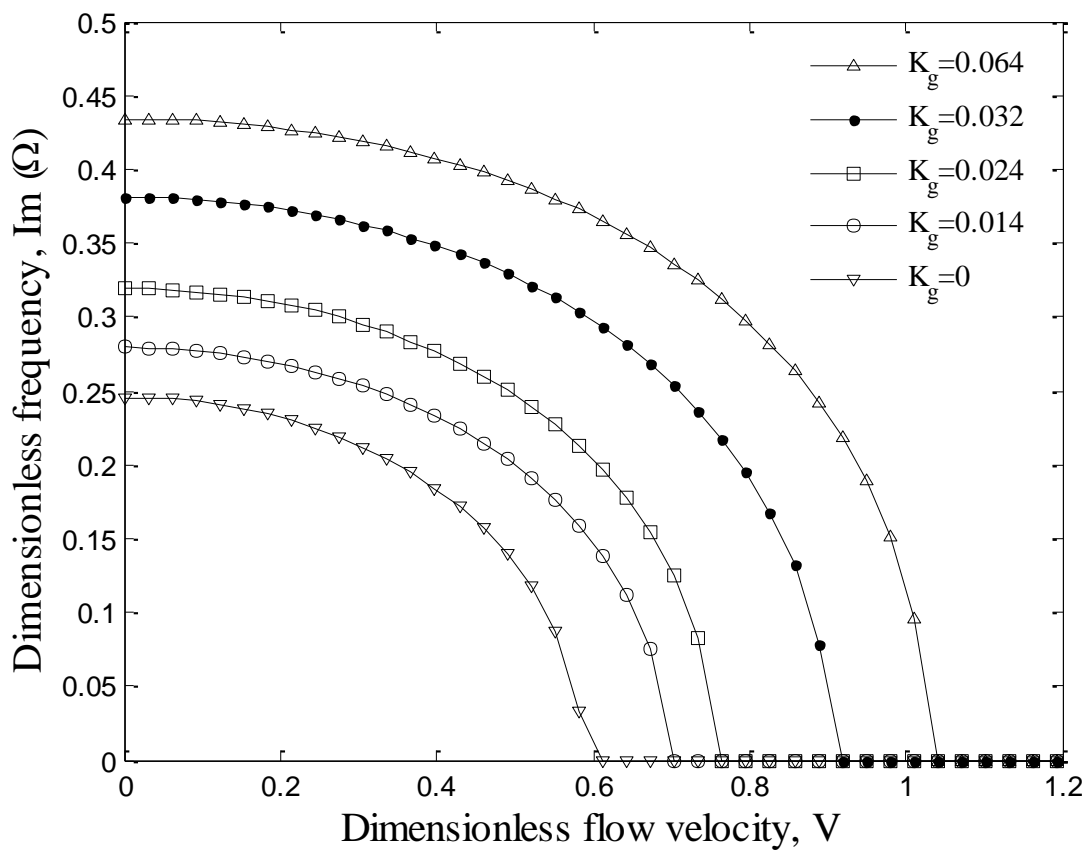
اثرات ویسکوزیته سیال ( $\mu$ ) روی قسمت موهومی فرکانس ( $\text{Im}(\omega)$ ) در برابر سرعت سیال در شکل (۴-۱۶) نمایش داده شده است. در سرعت صفر، ویسکوزیته روی فرکانس اثری ندارد در حالی که در سرعت های بالا اثرات ویسکوزیته بیشتر می شود چون اثرات ویسکوزیته در سرعت های بالا نمایان می شود. همچنین مشاهده می شود که با افزایش  $\mu$  فرکانس بیشتر می شود. دلیل این موضوع آنست که با افزایش  $\mu$ ، طبق قانون لزجت ( $\tau = \mu du/dy$ ) نیروی برشی سیال بیشتر می شود که باعث جابجایی ارتعاشی کوچکی می شود. بعلاوه، هر چه ویسکوزیته سیال بیشتر شود، سرعتی که باعث ناپایداری واگرایی و لرزشی می شود، افزایش می یابد.

#### ۴-۳-۵- بررسی تا ثیرات محیط الاستیک

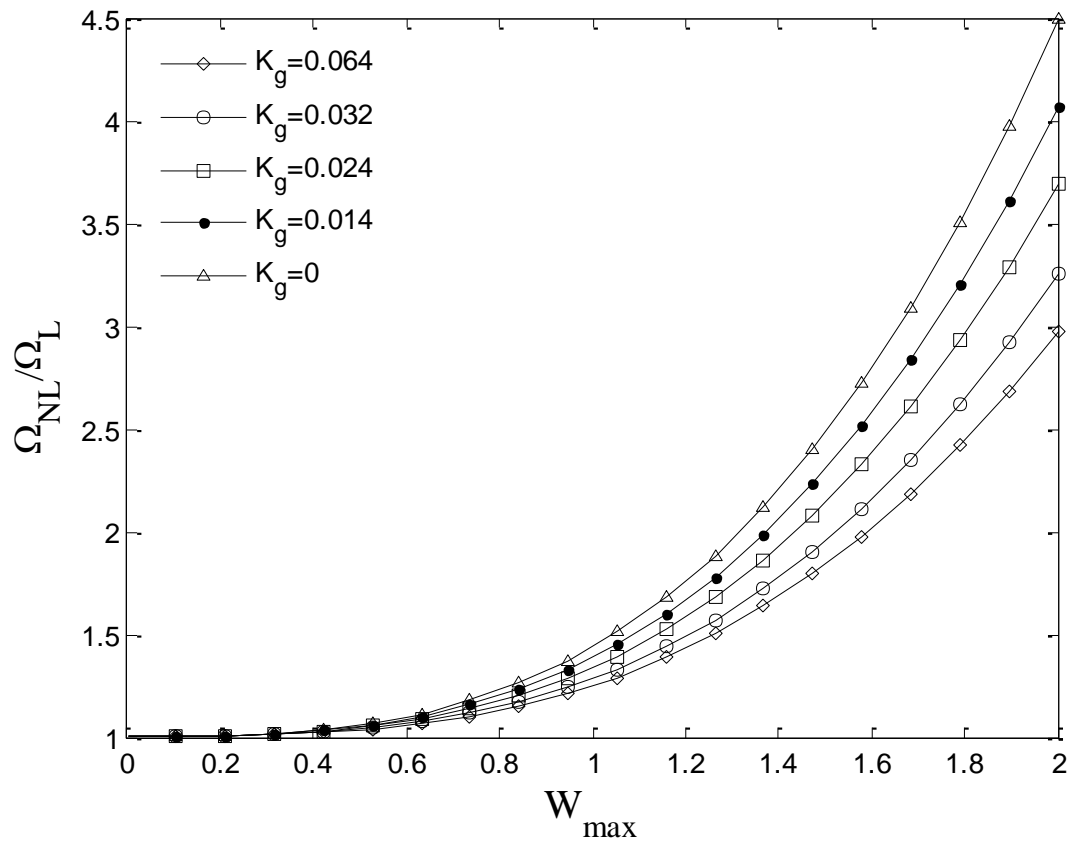
اثر محیط الاستیک به عنوان مدل عمودی وینکلر و مدل برشی پاسترناک شبیه سازی شده است. بنابراین در این پروژه، اثر ضریب پاسترناک در شکل های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) روی فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر و فرکانس بر حسب سرعت سیال عبوری از لوله در حالت بدون بعد نشان داده شده است. مشاهده می شود که هرچه محیط الاستیک قوی تر شود فرکانس بدلیل افزایش سختی لوله، بیشتر می شود. همچنین از شکل (۴-۱۷) مشخص است که محیط پاسترناک می تواند تاثیر به سزایی در دور کردن سیستم از ناپایداری داشته باشد. چون سرعت بحرانی سیستم در  $k_g = 0$  برابر  $1/12$  است در حالی که با افزایش ضریب پاسترناک به  $k_g = 0.064$  سرعت بحرانی دیرتر رخ می دهد و در مقدار  $1/32$  سیستم ناپایدار می شود.



شکل ۴-۱۶- اثر ویسکوزیته سیال عبوری از لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال



شکل ۴-۱۷- اثر ضریب پاسترناک روی فرکانس بر حسب سرعت سیال



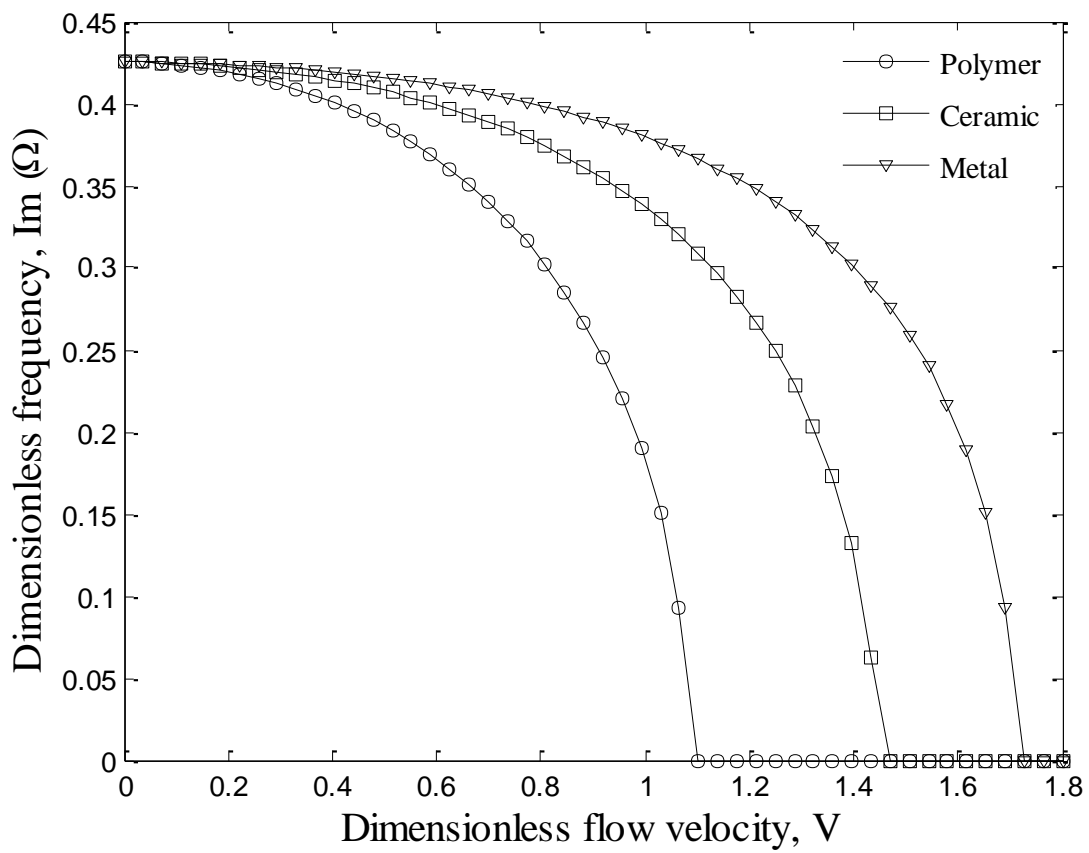
شکل ۴-۱۸- اثر ضریب پاسترناک روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر

#### ۴-۳-۶- بررسی تاثیرات جنس لوله

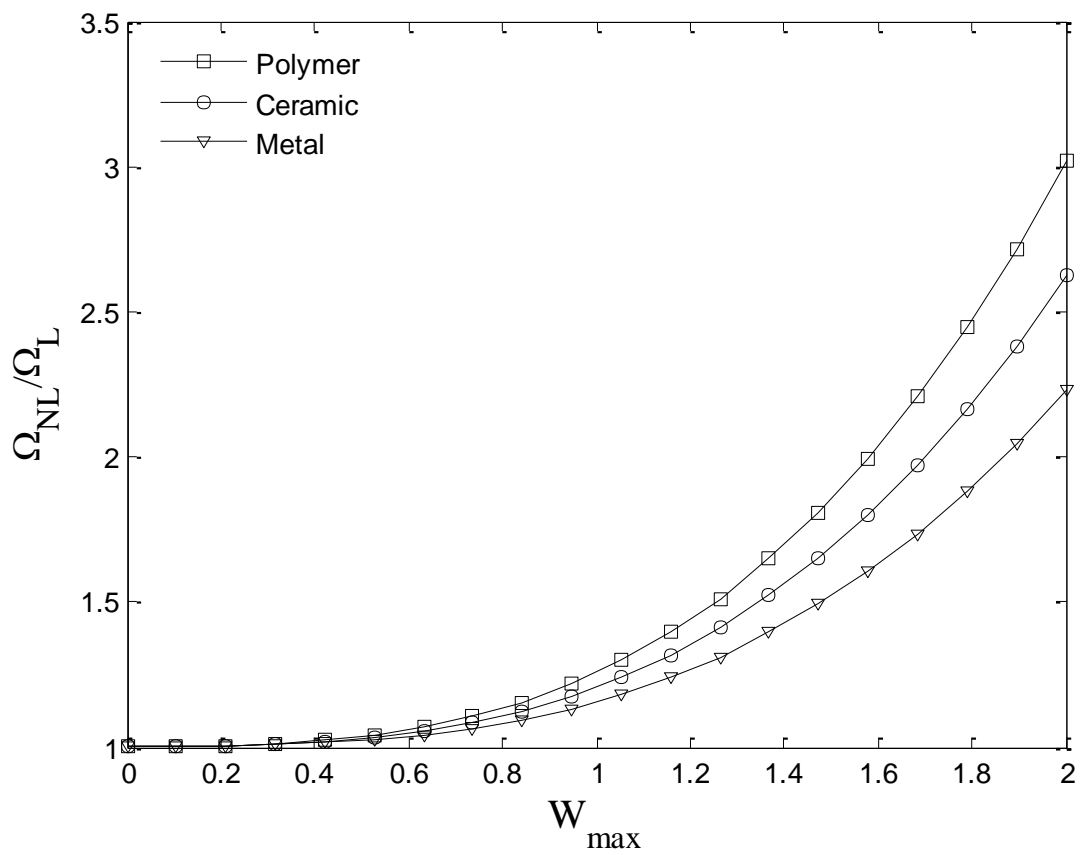
شکل های (۴-۱۹) و (۴-۲۰) اثر نوع جنس لوله را نشان می دهند. در این شکل ها از فلز فولاد با مدول الاستیک  $200\text{ Gpa}$  و ضریب پواسون 0.3، از پلیمر پلی اتیلن با مدول الاستیک  $125\text{ Gpa}$  و ضریب پواسون 0.3 و از سرامیک با مدول الاستیک  $130\text{ Gpa}$  و ضریب پواسون 0.3 استفاده شده است.

از شکل (۵-۱۹) که تاثیر جنس را روی فرکانس بر حسب سرعت سیال نشان می دهد، واضح است که بهترین جنس از لحاظ پایداری سیستم فلز است. دلیل این امر استحکام و سفتی بالای فلز نسبت به سرامیک و پلیمر می باشد. ولی باید به این نکته توجه داشت که جنس فلز خطرات ناشی از ترک در محل های جوش و همچنین ترکیدن لوله در اثر فشار سیال را افزایش می دهد. بنابراین جنس فلز در موارد خاصی کاربرد دارد در حالی که جنس پلیمر با وجود استحکام کمتر، بیشتر در لوله های حاوی جریان سیال استفاده می شود چون خطرات آن نسبت به فلز کمتر است.

همچنین از شکل (۴-۲۰) که تاثیر جنس را روی نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بر حسب ماکزیمم دامنه نشان می دهد، مشخص است که جنس فلز به دلیل سفتی بالا دارای نسبت فرکانس کمتری می باشد و پلیمر دارای بیشترین نسبت فرکانس می باشد.



شکل ۴-۱۹- اثر جنس لوله روی فرکانس بر حسب سرعت سیال

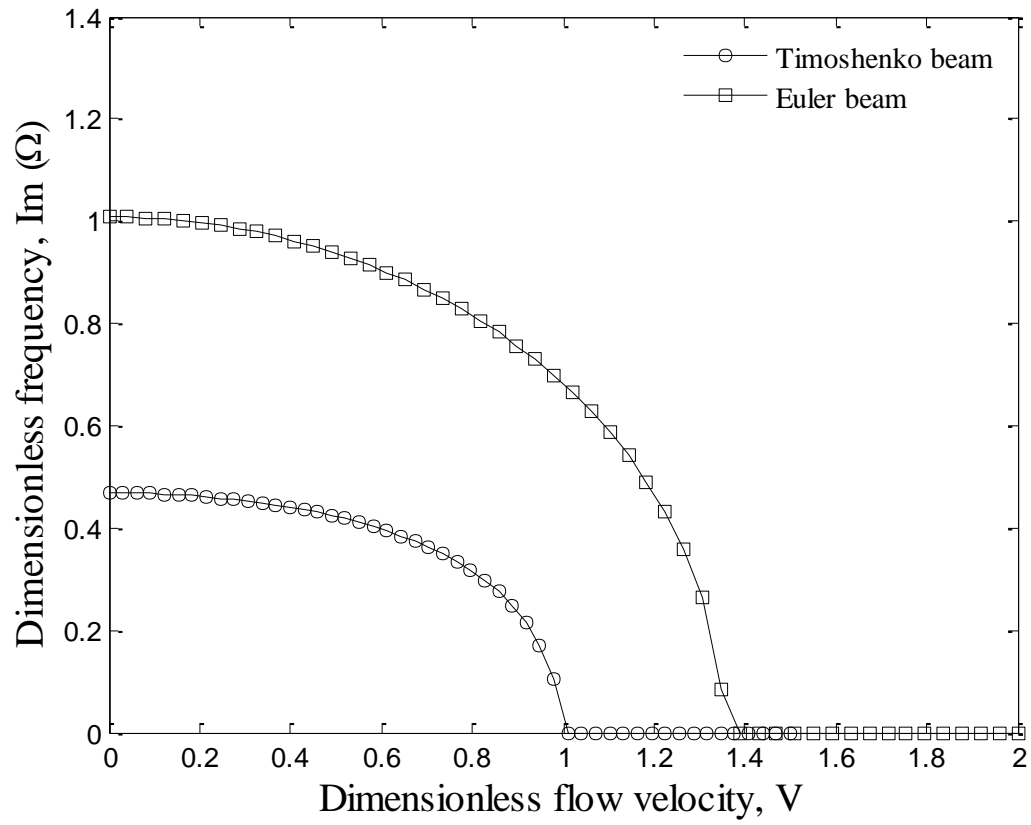


شکل ۴-۲۰- اثر جنس لوله روی نسبت فرکانس بر حسب ماکزیمم خیز تیر



#### ۴-۴- مقایسه مدل تیر اویلر و تیموشنکو

در شکل (۵-۲۱) نمودار فرکانس سازه سیستم نسبت به سرعت سیال در دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود محدوده فرکانس و سرعت بحرانی در تیر اویلر-برنولی بالاتر از تیر تیموشنکو می باشد. این اختلاف در فرکانس می تواند به این دلیل باشد که در تیر تیموشنکو در واقع علاوه بر تنش محوری در نظر گرفته شده در تیر اویلر، مولفه تنش برشی را هم در نظر می گیرد. بنابراین تیر تیموشنکو به واقعیت نزدیک تر بوده و دارای جواب های دقیق تری می باشد.



شکل ۴-۲۱- مقایسه فرکانس و سرعت بحرانی در دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو

#### ۴-۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، ارتعاشات غیر خطی یک لوله تقویت شده با نانولوله های کربنی با استفاده از روش تفاضلات مربعی (DQM) مورد بررسی قرار گرفت. لوله حاوی جریان سیال ویسکوز بوده و در محیط الاستیک واقع شده بود. همچنین محیط الاستیک با فنرهای عمودی وینکلر و برشی پاسترناک مدل شده بود. این لوله با مدل های تیر اوپلر-برنولی و تیموشنکو مورد تحلیل قرار گرفت. با استفاده از معادلات کرنش-جابجایی غیر خطی، تنش-کرنش، معادلات انرژی بدست آمده و با استفاده از روش همیلتون یا کار مجازی معادلات حرکت در سه جهت متعامد درمختصات استوانه ای محاسبه شد. هدف از انجام این تحقیق، بررسی اثرات سرعت سیال عبوری از لوله، درصد حجمی نانولوله کربنی، پارامترهای هندسی لوله، محیط الاستیک، ویسکوزیته و جنس لوله روی فرکانس ارتعاشات، نسبت فرکانس غیر خطی به خطی و سرعت بحرانی سیال می باشد. با توجه به نمودارهای رسم شده:

❖ در نظر گرفتن تعداد ۱۰ نقطه روی تیر منجر به همگرا شدن جواب های بدست آمده، خواهد شد.

❖ با افزایش درصد حجمی نانولوله کربنی، فرکانس بیشتر شده و محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه افزایش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد.

❖ کاهش  $L/R$  فرکانس سازه را افزایش داده ولی نسبت فرکانس را کاهش می دهد که این دلیل افزایش سفتی و استحکام لوله می باشد. بنابراین با کاهش  $L/R$  محدوده پایداری زیادتر می شود چون سرعت بحرانی لوله دیرتر رخ می دهد. در نتیجه کاهش این پارامتر باعث می شود سیستم دیرتر به نقطه واگرایی برسد یعنی ناپایداری واگرایی دیرتر رخ می دهد.

❖ در سرعت صفر، ویسکوزیته روی فرکانس اثری ندارد در حالی که در سرعت های بالا اثرات ویسکوزیته بیشتر می شود چون اثرات ویسکوزیته در سرعت های بالا نمایان می شود.

❖ با افزایش  $\mu$  فرکانس بیشتر می شود. دلیل این موضوع آنست که با افزایش  $\mu$ ، نیروی برشی سیال بیشتر می شود که باعث جابجایی ارتعاشی کوچکی می شود.

❖ هر چه ویسکوزیته سیال بیشتر شود، سرعتی که باعث ناپایداری واگرایی و لرزشی می شود، افزایش می یابد.

❖ اثر ضریب پواسون روی فرکانس سازه کم می باشد.

❖ هرچه محیط الاستیک قوی تر شود فرکانس دلیل افزایش سفتی لوله، بیشتر می شود.

❖ هرچند که تاثیرات پاسترناک کمتر از پارامترهایی همچون  $L/R$  می باشد، ولی در سیستم هایی که محدودیت ضخامت یا بعد داشته باشیم، می تواند پارامتر مفیدی برای دور کردن سیستم از حالت ناپایداری و افزایش فرکانس باشد.

❖ بهترین جنس از لحاظ پایداری سیستم فلز است. دلیل این امر استحکام و سفتی بالای فلز نسبت به سرامیک و پلیمر می باشد. ولی باید به این نکته توجه داشت که جنس فلز خطرات ناشی از ترک در محل های جوش و همچنین ترکیدن لوله در اثر فشار سیال را افزایش می دهد. بنابراین جنس فلز در موارد خاصی کاربرد دارد در حالی که جنس پلیمر با وجود استحکام کمتر، بیشتر در لوله های حاوی جریان سیال استفاده می شود چون خطرات آن نسبت به فلز کمتر است.

❖ در کل، محدوده ی فرکانس و سرعت بحرانی در تیر اویلر-برنولی بالاتر از تیر تیموشنکو می باشد. این اختلاف در فرکانس می تواند به این دلیل باشد که در تیر تیموشنکو در واقع علاوه بر تنش محوری در نظر گرفته شده در تیر اویلر، مولفه تنش برشی را هم در نظر می گیرد. بنابراین تیر تیموشنکو به واقعیت نزدیک تر بوده و دارای جواب های دقیق تری می باشد.

#### ۶-۴- پیشنهادات

برای ادامه این تحقیق پیشنهاد می‌گردد که موارد زیر به نتایج بدست آمده در این پایان نامه افزوده شود:

- ۱- بررسی کمانش دینامیکی غیر خطی لوله حاوی جریان سیال
- ۲- بررسی ارتعاش لوله تقویت شده با نانولوله های کربنی حاوی جریان سیال ضربان دار
- ۳- بررسی ارتعاش غیر خطی مخزن چند لایه کامپوزیتی
- ۴- بررسی ارتعاش لوله کامپوزیتی در ابعاد میکرو با استفاده از تئوری های مقیاس کوچک

## منابع و مأخذ

١. A. Mamthiram, H.L. Marcus, D.L. Bourell, Selective Laser Sintering Using Nanocomposite Materials, US (١٩٩٥)
٢. F.Gaeo, Instpolymer/Layered Inorganic particle Nanocomposites:A Better Solution To Make Materials Stronger, Risley Hall, Derby, Uk (٢٠٠١).
٣. H. Raffi-Tabar, Computational Physics of Carbon Nanotubes, Phys. Rep. ٣٩٠ (٢٠٠٤) ٢٣٥.
٤. A. Rubio, J.L. Corkill, M.L. Cohen, Theory of graphitic boron nitride nanotubes, Phys. Rev. B ٤٩ (١٩٩٤) ٥٠٨١.
٥. X. Blase, A. Rubio, S.G. Louie, M.L. Cohen, Stability and Band Gap Constancy of Boron-Nitride Nanotubes, Europhys. Lett ٢٨(١٩٩٤) ٣٣٥.
٦. N.G. Chopra, R.J. Luyken, K. Cherrey, V.H. Crespi, M.L. Cohen, S.G. Louie, A. Zettl, Boron nitride nanotubes, Science ٢٦٩ (١٩٩٥) ٩٦٦.
٧. S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, Nature ٣٥٤ (١٩٩١) ٥٦.
٨. X. Blase, A. Rubio, S.G. Louie, M.L. Cohen, Constancy of Boron Nitride Nanotubes, Phys. Rev. B ٥١ (١٩٩٤) ٦٨٦٨.
٩. E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, Beam Structures: Classical and Advanced Theories, John Wiley, UK (٢٠١١).
١٠. E. Reissner, Nonlinear effects in vibrations of cylindrical shells, Ramo-Wooldridge Corporation Report, AM٥-٦, (١٩٥٥).
١١. E. I. Grigolyuk, Vibrations of circular cylindrical panels subjected to finite deflections, Matematika ١٩ (١٩٥٥) ٣٧٦.
١٢. H.N. Chu, Influence of large-amplitudes on flexural vibrations of a thin circular cylindrical shell, J. Aero. Sci. ٢٨ (١٩٦١) ٦٠٢.
١٣. J. Nowinski, Nonlinear transverse vibrations of orthotropic cylindrical shells, AIAA Journal ١ (١٩٦٣) ٦١٧.
١٤. K. Dong, S.Q. Zhu, X. Wang, Wave propagation in multiwall carbon nanotubes embedded in a matrix material, Compos Struc. ٤٤ (٢٠٠٦) ٤٥٧.
١٥. A. Ghorbanpour Arani, A.A. Mosallaie Barzoki, R. Kolahchi, A. Loghman, Pasternak foundation effect on the axial and torsional waves propagation in embedded DWCNTs using nonlocal elasticity cylindrical shell theory, J. Mech. Sci. Tech. ٢٥ (٢٠١١) ١.
١٦. M. Amabili. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach, J. Sound Vib. ٢٦٤ (٢٠٠٣) ١٠٩١.
١٧. M.P. Païdoussis, J.P. Denise, Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid, J. Sound Vib. ٢٠ (١٩٧٢) ٩.
١٨. D.S. Weaver, T.E. Unny, On the dynamic stability of fluid-conveying pipes, J. Appl. Mech. ٤٠ (١٩٧٣) ٤٨.

۱۹. M.P. Païdoussis, Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, Elsevier Academic Press, London, UK (۲۰۰۳).
۲۰. M.P. Païdoussis, A.K. Misra, S.P. Chan, Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid, J. Appl. Mech. ۵۲ (۱۹۸۵) ۳۸۹.
۲۱. M. Amabili, R. Garziera, Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: shells containing or immersed in axial flow, J. Fluids Struct. ۱۶ (۲۰۰۲) ۳۱.
۲۲. F. Pellicano, M. Amabili, M.P. Païdoussis, Effect of the geometry on the non-linear vibration of circular cylindrical shells, Int. J. Non-Linear Mech. ۳۷ (۲۰۰۲) ۱۱۸۱.
۲۳. A. Messina, K.P. Soldatos, Vibration of completely free composite plates and cylindrical shell panels by a higher-order theory, Int. J. Mech. Sci. ۴۱ (۱۹۹۹) ۸۹۱.
۲۴. P. Tan, L. Tong, Micro-electromechanics models for piezoelectric-fiber-reinforced composite materials, Compos. Sci. Tech. ۶۱ (۲۰۰۱) ۷۵۹.
۲۵. R. Kadoli, N. Ganesan, Free vibration and buckling analysis of composite cylindrical shells conveying hot fluid, Compos. Struct. ۶۰ (۲۰۰۳) ۱۹.
۲۶. M.C. Ray, J.N. Reddy, Active control of laminated cylindrical shells using piezoelectric fiber reinforced composites, Compos. Sci. Tech. ۶۵ (۲۰۰۵) ۱۲۲۶.
۲۷. H. Matsuna, Vibration and buckling of cross-ply laminated composite circular cylindrical shells according to a global higher-order theory, Int. J. Mech. Sci. ۴۹ (۲۰۰۷) ۱۰۶۰.
۲۸. O. Brush, B. Almorth, Buckling of bars, plates and shells, Mc-Graw Hill (۱۹۷۵).
۲۹. A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, Exact solution for nonlocal axial buckling of linear carbon nanotube hetero-junctions, Proc IMechE Part C: J Mech. Eng. Sci. ۱۴ (۲۰۱۳) ۱.
۳۰. R.M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Company, Washington (۱۹۷۵).
۳۱. J.M. Whitney, Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates, Technomic Publishing Company, Lancaster (۱۹۸۷).
۳۲. L. Wang, Q.Ni, A reappraisal of the computational modelling of carbon nanotubes conveying viscous fluid, Mech. Res. Commun. ۳۶ (۲۰۰۹) ۸۳۳.
۳۳. A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, Nonlinear vibration and instability of embedded double-walled carbon nanocones based on nonlocal Timoshenko beam theory, Proc IMechE Part C: J Mech. Eng. Sci. ۱۲ (۲۰۱۳) ۱.
۳۴. R. Hill, A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials, Mech. Phys. Solids, ۱۳ (۱۹۶۵) ۲۱۳.
۳۵. T. Mori, K. Tanaka, Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials With Misfitting Inclusions, Acta Metall. ۲۱ (۱۹۷۳) ۵۷۱.
۳۶. R. Bellman, B.G. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation, J. Comput. Phys. ۱۰ (۱۹۷۲) ۴۰.
۳۷. C. Shu, H. Du, Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM, Compos. Technol. Part B ۲۸ (۱۹۹۷) ۲۶۷.



۳۸. M. Darvizeh, A. Darvizeh, C.B. Sharma, Buckling analysis of composite plates using differential quadrature method (DQM). *J. Steel Compos. Struct.* ۲ (۲۰۰۲) ۹۹.
۳۹. H. Haftchenari, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, C.B. Sharma, Dynamic analysis of composite cylindrical shells using differential quadrature method (DQM), *Compos. Struct.* ۷۸ (۲۰۰۷) ۲۹۲.
۴۰. C.T. Loy, K.Y. Lam, C. Shu, Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature, *Shock and Vib.* ۴ (۱۹۹۷) ۱۹۳.
۴۱. L. Hua, K.Y. Lam, Orthotropic Influence on frequency characteristic of a rotating composite laminated conical shell by the generalized differential quadrature method, *Int. J. Solids Struct.* ۳۸ (۲۰۰۱) ۳۹۹۰.
۴۲. C.W. Bert, M. Malik, The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration, *Int. J. Mech. Sci.* ۳۸ (۱۹۹۶) ۵۸۹.
۴۳. P. Malekzadeh, Nonlinear free vibration of tapered Mindlin plates with edges elastically restrained against rotation using DQM, *Thin-Walled Struct.* ۴۶ (۲۰۰۸) ۱۱.
۴۴. A.A. Mosallaie Barzoki, A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, M.R. Mozdianfard, Electro-thermo-mechanical torsional buckling of a piezoelectric polymeric cylindrical shell reinforced by DWBNNTs with an elastic core, *Appl. Math. Model.* ۳۶ (۲۰۱۲) ۲۹۸۳.

## **Abstract**

In this study, nonlinear free vibration and instability of a poly ethylene (PE) pipe reinforced with single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) using DQM is investigated. The shell is a composite reinforced by SWCNTs with characteristics of the equivalent composite being determined using Mori-Tanaca model. The pipe conveying viscous fluid is located on the elastic foundation. Employing nonlinear strains-displacements, stress-strain, the energy equations of pipe was obtained and using Hamilton's principal, the governing equations were derived. The influence of fluid velocity, volume percent of SWCNTs, geometrical parameters of pipe, elastic foundation and viscosity on the resonance frequency, critical fluid velocity and frequency ratio were investigated. Results showed that with increasing volume percent of SWCNTs, the frequency and critical fluid velocity increases while frequency ratio decreases.

**Keywords :** Nonlinear vibration; Nano-composite pipe; Fluid; DQM, Elastic foundation.



Azad University of Khoman  
Department of Civil Engineering

**Thesis:**  
**For Degree of Master of Science (MSc)**  
**In Civil Engineering**

**Title:**  
**Nonlinear vibration analysis of nano-composite  
pipes conveying fluid**

**Supervisor:**  
Dr. Reza Kolahchi

**Advisor:**  
Dr. Mahmood Rabani Bidgoli

**By:**  
Reza Dovrangard

October ۲۰۱۰